## <u>הרצאה 3</u>

שיעור שעבר ראינו הגדרה של איחוד וחיתוך בין שתי קבוצות.
השיעור נתחיל עם הגדרה עבור איחוד וחיתוך של יותר משתי קבוצות.

הגדרנו איחוד של שתי קבוצות $A,B$ באופן הבא: $A\cup B=\{x\in U: x\in A\vee x\in B\}$.
אם נסתכל על שלוש קבוצות $A,B,C$ אז באופן טבעי איבר נמצא ב $A\cup B\cup C$ אם ורק אם קיימת קבוצה מתוך שלושת הקבוצות שהאיבר נמצא בה.
כעת נרחיב את ההגדרה עבור $n$ קבוצות:

**<u>איחוד כללי (מספר סופי של קבוצות)</u>**

יהיו $A_1,...,A_n$ קבוצות. $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ כך ש $1\le i\le n$ קיים $\}$.

**<u>דוגמה</u>**

$$A_1=\{1,2,3\},A_2=\{1,2,8\},A_3=\{1,7,8\}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{3}A_i=\{1,2,3,7,8\}.$$

שימו לב $3\in\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ מכיוון שקיים $i=1$ כך ש $3\in A_i$.

**<u>הערה</u>**

אם נתבונן נתבונן במשפחת הקבוצות $A_k=\{-k\}$ כאשר $k$ מספר טבעי הגדרת האיחוד לא תתאים למקרה הזה. לכן יש צורך להגדיר את האיחוד באופן שונה.
נתבונן בקבוצת האינדקסים – במקרה שלנו קבוצת האינדקסים היא $\mathbb{N}$ ואז נאמר שאיבר נמצא באיחוד אם ורק אם קיים איבר $i$ שבקבוצת האינדקסים כך שהאיבר נמצא ב $A_i$.
למשל: $-11$ נמצא באיחוד מכיוון שקיים מספר טבעי $11$ כך ש $-11\in A_{11}$, אבל $11$ לא נמצא בקבוצת האיחוד מכיוון שלא קיים מספר טבעי $k$ שעבורו $11\in A_k$.
אם היינו מגדירים את משפחת הקבוצות באופן הבא: $A_k=\{-k\}$ כאשר $k$ הוא מספר שלם היינו מקבלים ש $11$ כן נמצא באיחוד, ולכן יש חשיבות רבה לקבוצת האינדקסים.

**<u>איחוד כללי (לא בהכרח מספר סופי של קבוצות)</u>**

תהיי $I$ קבוצה (קבוצת אינדקסים) ותהיי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות.
$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ כך ש $i\in I$ קיים $\}$.

**<u>דוגמאות</u>**

1. לכל $k\in N$ תהיי $A_k=[-k,k]$, אז $\bigcup_{k\in N}A_k=R$.
2. לכל $k\in 2N$ תהיי $A_k=\{-k,k\}$ אז $\bigcup_{k\in N}A_k=2Z\setminus\{0\}$.

**<u>חיתוך כללי (מספר סופי של קבוצות)</u>**

יהיו $A_1,...,A_n$ קבוצות. $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ - $1\le i\le n$ לכל $\}$.

**<u>דוגמה</u>**

$$A_1=\{1,2,3\},A_2=\{1,2,4,5\},A_3=\{1,2,6\},A_4=\{1,2,4\}\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{4}A_i=\{1,2\}.$$

שימו לב: $1\in \bigcap_{i=1}^{4} A_i$ מכיוון ש $1\in A_i$ לכל $1\le i\le 4$.

**חיתוך כללי (לא בהכרח מספר סופי של קבוצות)**

תהיי $I$ קבוצה (קבוצת אינדקסים) ותהיי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות.

$\bigcap_{i\in I} A_i =\{x\in U : x\in A_i \quad \text{לכל}\quad i\in I\}$.

**דוגמה**

לכל $k\in N$ $A_k=\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$. אז $\bigcap_{k\in N} A_k=\{0\}$.

**קבוצת החזקה**

עבור קבוצה כלשהי $A$ נגדיר קבוצה חדשה שכל איבר שייך לה אם ורק אם הוא תת קבוצה של הקבוצה $A$.

**דוגמה**

$A=\{1,2\}$ אז הקבוצה החדשה תהייה $\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ שימו לב שכל איבר בקבוצה הוא תת קבוצה של $A$.

**הגדרה**

$P(A)=\{B : B\subseteq A\}$ היא קבוצת החזקה של $A$.

**דוגמאות**

1. $A=\phi \Rightarrow P(A)=\{\phi\}$.
2. $A=\{1\}\Rightarrow P(A)=\{\phi,1\}$.

**משפט**

אם $|A|=n$ אז $P(A)=2^n$.

**הוכחה**

נוכיח באינדוקציה על $n$.

אם $|A|=0$ אז $A=\phi$ וקבוצת החזקה היא $P(A)=\{\phi\}$ ולכן מספר האיברים בקבוצת החזקה הוא אחד והטענה נכונה במקרה זה.

נניח שאם $|A|=n$ אז $|P(A)|=2^n$.

נבדוק את מספר האיברים בקבוצת החזקה של $A_1=A\cup\{b\}$ כאשר $b\notin A$.

אם $B\subseteq A$ אז $B\subseteq A_1$ מכיוון ש $|P(A)|=2^n$ נקבל שמספר תתי הקבוצות של מכילות את $\{b\}$ הוא $2^n$.

כעת נבדוק מהו מספר הקבוצות שמכילות את $\{b\}$ ומוכלות ב $A_1$.

נניח ש $\{b\}\in B_1\subseteq A_1$ אז $B_1\setminus\{b\}\subseteq A$ ובנוסף $B_1=B_1\setminus\{b\}\cup\{b\}$ ז"א שלכל קבוצה שמכילה את $\{b\}$ מתאימה קבוצה אחת ויחידה של מכילה את $\{b\}$ ולכן מספר תתי הקבוצות של $A_1$ שמכילות את $\{b\}$ הוא $2^n$.

סה"כ קיבלנו ש $|P(A\cup\{b\})|=2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$.

**זוג סדור**

ראינו שבהגדרת קבוצה אין חשיבות לסדר האיברים. ישנם מקרים שסדר האיברים כן חשוב, למשל בהצגת נקודה במישור. נסמן זוג סדור $(a,b)$ כאשר סדר האיברים משנה.

**הגדרה**

נאמר ש $(a,b)=(c,d)$ אם ורק אם $a=c \wedge b=d$ .

**דוגמה**

$(1,2)\neq(2,1)$ אבל $(1,2)=(2,1)$ .

**מכפלה קרטזית**

תהיינה $A,B$ קבוצות הקבוצה $A\times B=\{(a,b): a\in A \wedge b\in B\}$ נקראת המכפלה הקרטזית של $A,B$ .

**דוגמאות**

1. $A=\{2,3\}, B=\{1,4\} \Rightarrow A\times B=\{(2,1),(2,4),(3,1),(3,4)\}$ .
2. $A=\{2,3\}, B=\{1,4\} \Rightarrow B\times A=\{(1,2),(1,3),(4,2),(4,3)\}$ .

שימו לב: $A\times B\neq B\times A$ .

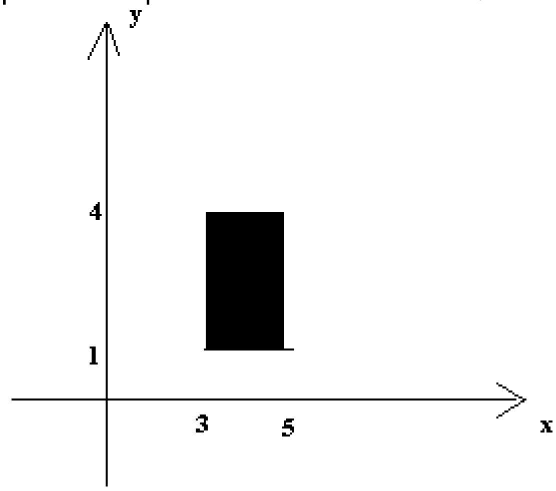
**הערה**

$A\times B=C\times D \Leftrightarrow A=C\wedge B=D$ .

**דוגמאות נוספות למכפלה קרטזית**

3. $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R} \Rightarrow A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ז"א קבוצת כל הנקודות במישור – סימון $\mathbb{R}^2$ .
4. $A=[3,5], B=[1,4] \Rightarrow A\times B=\{(x,y)\in R^2 \mid 3\leq x\leq 5 \wedge 1\leq y\leq 4\}$ .

המשמעות הגיאומטרית לדוגמה 4 – קבוצת כל הנקודות במלבן שבשרטוט




**ח-יה סדורה**

תהיינה $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ קבוצות המכפלה הקרטזית של $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ היא $A_1\times A_2\times A_3,....\times A_n=\{(a_1,a_2,...,a_n) \mid a_1\in A_1, a_2\in A_2,...,a_n\in A_n\}$ .

איבר בקבוצה הנ"ל נקרא ח-יה סדורה.

**דוגמה**

$A_1=\{1,2\}, A_2=\{2,3\}, A_3=\{0\} \Rightarrow A_1\times A_2\times A_3=\{(1,2,0),\{1,3,0\},(2,2,0),(2,3,0)\}$ .

**הערה**

עבור קבוצה כלשהי מתקיים $\phi\times A=\phi$ .