מערך תרגול 12 מופשטת 3

בניות בסרגל ומחוגה

הגדרה 12.1 הרחבת שדות E/F היא "מוגדרת ריבועית", אם יש הרחבות ביניים $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = E$ כך ש $[F_{i+1} : F_i]$

משפט 12.2 מספר a הוא ניתן לבניה אם ורק אם יש יש הרחבה מוגדרת ריבועית $E/\mathbb{Q}$ כך ש $a \in E$. בפרט, דרגת הפולינום המינימלי של a היא חזקה של 2.

מסקנה 12.3 אם דרגת הפולינום המינימלי של a אינה חזקה של 2 אז הוא אינו ניתן לבניה.

תרגיל 12.4 הראו כי $e^{\frac{2\pi i}{7}}$ אינו ניתן לבניה.

פתרון: זהו הרי שורש 7 פרימיטיבי של 1 ואנחנו יודעים שהפולינום המינימלי שלו הוא $\frac{x^7-1}{x-1}$ שהוא מדרגה 6 שאינו חזקה של 2.

תרגיל 12.5 האם ניתן באמצעות סרגל ומחוגה לחלק זוית ל 7?

פתרון: נניח שאפשר. אפשר לבנות את הזוית π. אם אפשר לחלק כל זוית ל7 אפשר לבנות את הזוית $\frac{\pi}{7}$. זה אומר שאפשר לבנות את המספר $e^{\frac{\pi i}{7}}$ (זאת הנקודה שבה עיגול היחידה חותך את הקרניים של הזוית) ולכן אפשר גם לבנות את

$$e^{\frac{2\pi i}{7}}$$

בסתירה לתרגיל הקודם.

תרגיל 12.6 האם ניתן לבנות את השורש ה 5 - פרימיטיבי $\rho = e^{\frac{2\pi i}{5}}$?

פתרון: אנחנו יודעים כבר שהפולינום המינימלי שלו הוא $\frac{x^5-1}{x-1}$ שהוא מדרגה 4. שזה אכן חזקה של 2. הגיוני לנחש שאפשר לבנות אותו אבל איך מוכיחים את זה? נזכור ש

$$[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 4$$

ושזוהי הרחבת גלואה. אנחנו יודעים שחבורת גלואה כאן היא $\mathbb{Z}_4$ שיש לה תת חבורה מאינדקס 2. לפי התאמת גלואה, יש שדה ביניים (בשיעורי בית גם מצאתם אותו אבל כאן זה לא חשוב כל כך)

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\rho)$$

בהכרח המימדים של כל שדה מעל הבא בתור הם 2 ולכן זו אכן הרחבה מוגדרת ריבועית וניתן לבנות את $e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

בתרגיל בית תכלילו את הרעיון של ההוכחה שעשינו כאן.

תרגיל 12.7 האם ניתן לבנות מצולע משוכלל בעל 5 צלעות?

פתרון: כן. כבר ראינו שזה שקול ליכולת לבנות את $e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

הערה 12.8 יש הרחבת שדות E/F שחבורת גלואה שלה היא S_4 בעזרת ה' נוכיח זאת בהמשך הקורס. (למעשה לכל G סופית יש הרחבת שדות שהיא חבורת גלואה שלה, אולי גם את זה נוכיח בהמשך)

תרגיל 12.9 תהי E/F הרחבת גלואה ויהיו שדות ביניים K, L שניהם ממימד שהוא חזקה של 2 (לא בהכרח מוגדרים ריבועית!). הוכיחו או הפריכו: גם $K \cdot L$ ממימד שהוא חזקה של 2.

פתרון: לא. נניח שהטענה הנכונה. נסמן

$$G = \mathrm{Gal}(E/F)$$

$$H = \mathrm{Gal}(E/K)$$

$$R = \mathrm{Gal}(E/L)$$

$$[K : F] = \frac{[E : F]}{[E : K]} = \frac{|G|}{|H|} = [G : H]$$

ובדומה

$$[L : F] = [G : R]$$

כלומר H, R תתי חבורות מאינדקס שהוא חזקה של 2. בדומה ולפי התאמת גלואה

$$[K \cdot L : F] = \frac{[E : F]}{[E : K \cdot L]} = \frac{|G|}{|\,\mathrm{Gal}(E/K \cdot L)|} = \frac{|G|}{|H \cap R|}$$

השאלה היא האם האינדקס של $H \cap R$ הוא גם חזקת 2?

קל לספק דוגמא שבה זה לא כך. ניקח $G = S_4$ (לפי ההערה למעלה, יש סיטואציה כזאת). ניקח $H \cong S_3$ להיות כל התמורות שמקבעות את 1 ו $R \cong S_3$ כל התמורות שמקבעות את 2 (ברור שיש K, L שדות ביניים מתאימים כי הרי

$$K = E^H \quad L = E^R$$

)

H ו R הם מאינדקס 4 אבל $H \cap R$ הם כל התמורות שמקבעות את $\{1, 2\}$ כלומר זו חבורה שאיזומורפית ל S_2 שהיא מאינדקס 12. סתירה.

משפט 12.10 E/F הרחבת גלואה היא מוגדרת ריבועית אם ורק אם $\mathrm{Gal}(E/F)$ היא חבורת־2 (כלומר, חבורה מגודל 2^n). נשאר לתרגיל בית עם הדרכה מסוימת

תרגיל 12.11 תהי E/F הרחבת גלואה מוגדרת ריבועית. ויהי שדה ביניים K. הוכיחו כי גם K מוגדר ריבועית.

פתרון: $\mathrm{Gal}(E/F)$ היא חבורה מסדר 2^n. נסמן

$$H = \mathrm{Gal}(E/K)$$

ל G יש סדרה יורדת של תתי חבורות (כפי שתוכיחו בתרגיל בית)

$$1 = G_r \subseteq G_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq G_0 = G$$

כך ש

$$[G_{i-1} : G_i] = 2$$

עכשיו נסתכל על

$$[HG_{i-1} : HG_i]$$

נשים לב שמתקיים

$$G_i \subseteq HG_i \cap G_{i-1} \subseteq G_{i-1}$$

בגלל ש G_{i-1}/G_i היא חבורה פשוטה, אחת ההכלות האלה צריכה להיות שוויון. אם

$$HG_i \cap G_{i-1} = G_i$$

אז לפי משפט האיזו השני מתקיים

$$HG_{i-1}/HG_i \cong G_{i-1}/G_i$$

ואז האינדקס הוא 2. אם דווקא מתקיים

$$HG_i \cap G_{i-1} = G_{i-1}$$

אז בעצם

$$G_{i-1} \subseteq HG_i$$

ולכן

$$HG_{i-1} = HG_i$$

והאינדקס הוא 1. בכל מקרה יש סדרה של תתי חבורות

$$H = HG_r \subseteq HG_{r-1} \subseteq \cdots \subseteq HG_0 = G$$

שהאינדקס של כולן קטן או שווה ל2. מורידים את אלה עם אינדקס 1. ונשארים עם סדרה שבה כל האינקסים שווים ל2.

כעת נגדיר

$$L_i = E^{HG_i}$$

ולפי משפט ההתאמה הם מהווים סדרה של שדות ביניים ˆ

$$F = E^{HG_0} \subseteq \cdots \subseteq E^H = K$$

כנדרש

תרגיל 12.12 תהי K/F הרחבה עם שדות ביניים K, L מוגדרים ריבועית. הוכיחו כי KL מוגדר ריבועית.

פתרון:

ראשית נשים לב לכל הרחבת שדות $F \subseteq L$ מתקיים

$$[KL : KF] \leq [L : F]$$

כי אם $b_1, \ldots, b_n$בסיס ל L מעל F אז זאת בטח קבוצה פורשת ל KL מעל KF.

עכשיו היות ש L מוגדרת ריבועית יש לנו

$$F = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_r = L$$

כך ש

$$[L_{i+1} : L_i] = 2$$

לפי הנ"ל יתקיים ש

$$[KL_{i+1} : KL_i] \leq 2$$

כמו כן יש

$$F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_l = K$$

כך ש

$$[K_{i+1} : K_i] = 2$$

ולכן אם מעדנים לפי הצורך את

$$F = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_l = K = KF \subseteq KL_1 \subseteq \cdots \subseteq KL_r = KL$$

מקבלים את הסדרה הרצויה.