תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. תהינה $f_1(z), \cdots, f_m(z)$ מספר סופי של פונקציות אנליטיות ב $A = \{z \mid |z| < 1\}$ ונתון כי לכל $z \in A$

$$f_1(z) \cdots f_m(z) = 0$$

הוכיחו כי לפחות אחת מהפונקציות האלה היא פונקצית האפס.
פתרון: נגדיר $D = \{z \mid |z| < 1\}$. (שהיא פתוחה, בשונה מהתחום המקורי שלנו). נגדיר

$$E_i = \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2} \text{ and } f_i(z) = 0\}$$

לפי הנתון, ברור ש

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$$

ולכן לפחות אחת מבין קבוצות אלו היא אינסופית. בלי הגבלת כלליות E_1 היא אינסופית. E_1 היא קבוצה אינסופית וחסומה, ולכן לפי בולצאנו ווירשטראס יש לה נקודת הצטברות, נניח p. ברור ש $p \in D$ (למעשה $p \in \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$ כי זאת קבוצה סגורה) וגם $E_1 \subseteq D$ ו D קבוצה פתוחה. אז בעצם f_1 מתאפסת על E_1 שהיא קבוצה ב D עם נקודת הצטברות ב D ולכן לפי משפט היחידות

$$f_1(z) = 0 \quad \forall z \in D$$

(הערה: לא רציתי להגדיר $E_i = \{z \mid |z| \leq \frac{1}{2} \text{ and } f_i(z) = 0\}$ כי אז נקודת הצטברות של E_i יכולה להיות מחוץ ל D).

2. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקימות $f(f(z)) = f(z)$.
פתרון: ראשית נשים לב שכל הפונקציות הקבועות מקיימות את הדרישה. אם $f(z)$ שלמה אבל לא קבועה, אז $f(\mathbb{C})$ היא קבוצה עם נקודת הצטברות ב$\mathbb{C}$. (ראינו בתרגול ש $f(\mathbb{C})$ צפופה ב $\mathbb{C}$ ולכן כל נקודה היא נקודת הצטברות של $f(\mathbb{C})$) אבל לפי הנתון, לכל $a \in f(\mathbb{C})$ מתקיים $f(a) = a$ ולכן לפי משפט היחידות $f(z) = z$. כמו כן, $f(z) = z$ באמת מקיימת את התנאי. לסיכום הפונקציות שמקיימות את התנאי הנ"ל הן בדיוק הפונקציות הקבועות ו $f(z) = z$.

3. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0. בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

(א) $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$
פתרון: לפי הנתונים

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2} \quad g(x) = (z-z_0)^3 \tilde{g}(z)$$

$$r(z) = (z-z_0)^2\tilde{r}(z) \quad h(z) = (z-z_0)\tilde{h}(z)$$

כאשר כל הטילדות אנליטיות ולא מתאפסות ב z_0. כעת,

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{(z-z_0)\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$$

מה שנשאר אנליטי ב z_0 ולכן z_0 סינגולריות סליקה.

(ב) $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

פתרון: עם אותם סימונים של הסעיף הקודם

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2}+(z-z_0)^3\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^3}\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$$

הפונקציה $\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$ אנליטית ב z_0 ולכן z_0 היא קוטב מסדר 3.

4. הסבירו מדוע $z_0 = 1$ היא קוטב של הפונקציה

$$f(z) = \frac{\sin^3(z-1)}{(\operatorname{Log} z)^4(1-\cos(z-1))^2}$$

ומצאו את סדר הקוטב.

פתרון: 1 הוא אפס מסדר כלשהוא של המונה והמכנה. נבין את הסדר. היות ש $z_0 = 1$ הוא אפס מסדר 1 של $\sin z$, הוא אפס מסדר 3 של $\sin^3(z-1)$.
1 הוא אפס מסדר 1 של $\operatorname{Log} z$ (הוא הרי לא מאפס את הנגזרת $\frac{1}{z}$) ולכן הוא אפס מסדר 4 של $(\operatorname{Log} z)^4$. כמו כן 1 הוא אפס מסדר 2 של $1-\cos(z-1)$, למשל לפי הפיתוח טיילור

$$1-\cos(z-1) = \frac{(z-1)^2}{2} - \frac{(z-1)^4}{4!} + \cdots$$

ולכן הוא אפס מסדר 4 של

$$(1-\cos(z-1))^2$$

לסיכום 1 הוא אפס מסדר 3 של המונה ומסדר 8 של המכנה ולכן הוא קוטב מסדר 5 של הפונקציה לפי משפט שראינו.

5. (א) תהי z_0 קוטב של $f(z)$. איזה סינגולריות יש ל $\frac{1}{f(z)}$ בנקודה z_0?
היות ש

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$$

וודאי

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = 0$$

ולכן זו סינגולריות סליקה.

(ב) תהי z_0 סינגולריות סליקה של $f(z)$. איזה סינגולריות יש ל $\frac{1}{f(z)}$ בנקודה z_0?
(רמז: יש להפריד למקרים)
אם

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \neq 0$$

אז

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{L}$$

ולכן זו עדיין סינגולאריות סליקה אבל אם

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$$

אז

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty$$

ולכן זה קוטב.