ב"א אנליזה 2 תשעח מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\mathrm{d}x$.

פתרון: נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-x & x^3 \qquad +1 \\ & -x^3+x^2 \\ \hline & x^2 \\ & -x^2+x \\ \hline & x+1 \end{array}$$

וקיבלנו ש $x^3+1=(x+1)\left(x^2-x\right)+(x+1)$ ולכן

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\mathrm{d}x=\int \frac{(x+1)\left(x^2-x\right)+(x+1)}{x^2-x}\mathrm{d}x=\int x+1\mathrm{d}x+\int \frac{x+1}{x^2-x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+x+\int \frac{x+1}{x^2-x}\mathrm{d}x$$

ונמשיך עם $\int \frac{x+1}{x^2-x}\mathrm{d}x$ ע"י פירוק לשברים חלקיים: כיוון ש $x^2-x=x(x-1)$, קיימים A,B קבועים כך ש

$$\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

ואם נעשה מכנה משותף והשוות מונים נקבל ש

$$x+1=A(x-1)+Bx$$

ונוכל להציב $x=1$ לקבל $B=2$ ונוכל להציב $x=0$ לקבל $1=-A$ ולכן $A=-1$. לסיכום קיבלנו ש

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\mathrm{d}x&=\frac{x^2}{2}+x+\int \frac{x+1}{x^2-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}+x+2\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|-\ln|x|+C\end{aligned}$$

(ב) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{c} t=x^2+1 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \sqrt{t}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right) + C\end{aligned}$$

ואם נחזור למונחי x, נקבל שהתשובה הסופית היא:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x - e}$.

פתרון: <u>אסימפטוטות אנכיות:</u> הפונקציה לא מוגדרת ב 1 ויש לה נקודת קצה ב 0 כי אינה מוגדרת ל $x \le 0$, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{e^x - e} = \left\{\frac{-\infty}{1-e}\right\} = \infty$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x = 0$. בנוסף,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{e^x - e} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{1}{e}$$

ולכן אין אסימפטוטה אנכית ב $x = 1$.

<u>אסימפטוטה משופעת מימין:</u> נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(e^x - e\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \cdot \frac{1}{\left(e^x - e\right)} = 0 \cdot 0 = 0$$

כאשר המעבר האדום מוצדק ע"י

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

ו

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{(e^x-e)}-0\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\{\frac{1}{\infty}\}=0$$

ולכן $y=0$ אסימפטוטה משופעת מימין.

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל:</u> אין אסימפטוטה משופעת משמאל כי הפונקציה לא מוגדרת עבור $x\le 0$.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ הפונקציה מוגדרת (וכן בכל נקודה אחרת). נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ שמתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר. הפונקציות $\frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}$ ו $\frac{1}{x}$ חיוביות בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right)}=e^0=1$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^4}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x^2}^0 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\ln(1+t)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^4}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{4x^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\frac{\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\frac{\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

ועבור $f(x)=\sin(x)$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(x)\mathrm{d}x=-\cos(x)\Big|_0^1=-\cos(1)+\cos(0)=1-\cos(1)$$

.4

(א) קרבו את $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{1000}$.

פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}$$

ומכיוון ש $\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-\frac{1}{5}}$, נקבל ש

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{\left(-\frac{1}{5}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!5^n}$$

ומכיוון ש $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!5^n}$ הוא טור לייבניץ, מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!5^n}\right| \le \left|\frac{(-1)^k}{k!5^k}\right| = \frac{1}{k!5^k}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\frac{1}{\sqrt[5]{e}} - \frac{(-1)^n}{n!5^n}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{100} \le \frac{1}{k!5^k}$. עבור $k = 3$ נקבל $\frac{1}{100} = \frac{1}{5^3} < \frac{1}{3!5^3}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{3-1} \frac{(-1)^n}{n!5^n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1!\cdot 5} + \frac{1}{2!\cdot 5^2} = \frac{41}{50}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) חשבו את $f^{(65)}(0)$ עבור $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

פתרון: לכל $|x| < 1$ הטור ההנדסי הידוע הוא

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ואם נציב $-x$ במקום x נקבל

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

ולכן

$$\frac{x}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{n+1}$$

וזהו טור טיילור שלו סביב 0. בטור טיילור, המקדם של x^{65} הוא $\frac{f^{(65)}(0)}{65!}$ ואצלנו הוא (עבור $n = 64$) $(-1)^{64} = 1$.
מההשוואה $\frac{f^{(65)}(0)}{65!} = 1$ נקבל ש

$$f^{(65)}(0) = 65!$$

5. תהא f פונקציה, כך שלכל $x > 0$ מתקיים כי $f'(x) > 0$ וגם $f''(x) < 0$.

(א) הוכיחו/הפריכו: ל f יש אסימפטוטה אופקית באינסוף.

פתרון: הפרכה: $f(x) = \ln(x)$ מקיימת כי $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ו $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ אבל

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$$

(ב) הוכיחו/הפריכו: $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ מתבדר.

פתרון: הפרכה: $f(x) = -e^{-x}$ מקיימת כי $f'(x) = e^{-x} > 0$ ו $f''(x) = -e^{-x} < 0$ אבל

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = -\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -\left[-e^{-x}\Big|_1^\infty\right] = -\left[0 - e^{-1}\right] = e^{-1}$$

מתכנס.