תבניות דפרנציאליות - תרגול

10 במרץ 2014

1 הגדרה וסימונים

הגדרה 1.1 פונקציה $\phi : \Omega \to \Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ נקראת k-תבנית דפרנציאלית על Ω.

המילים אחרות k תבנית דירפנציאלית על Ω היא העתקה שמתאימה לכל נק $x \in U$ פונקציה k-מולטילינארית מתחלפת $\phi\left(x\right) = \phi_x$ על $\mathbb{R}^n$. כזכור, כל פונקציה k-מולטילינארית מתחלפת היא צירוף לינארי של dx_I, ולכן ניתן לרשום את $\phi\left(x\right)$ בצרורה $\phi\left(x\right) = \sum_I \phi_I\left(x\right) dx_I$ כאשר הI רץ על כל הסדרות העולות באורך k, $I = \left(i_1, \ldots, i_k\right)$ עם $1 \leq i_r \leq n$ ולכל I כזה ϕ_I היא פונקציה ממשית.

דוגמא: תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה. יהי $\Gamma_f = \left\{(x, f(x)\right\}$ הגרף של f ב $\mathbb{R}^{n+1}$. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x\right)dx_n - dx_{n+1}$ הינו תבנית דפרנציאלית מסדר 1. (זה בעצם מכפלה פנימית של הנורמל לגרף הפונקציה בx עם הוקטור).

הגדרה 1.2 תבנית דיפרנציאלית $\phi(x) = \sum_I \phi_I(x)dx_I$ נקראת רציפה (או C^r) אם לכל I, ϕ_Iהיא רציפה (או C^r).

דוגמא: $\left|cosx\right| dx \wedge dy + x^3 dy \wedge dz + dx \wedge dz$ היא תבנית רציפה על $\mathbb{R}^3$.

הגדרה 1.3 שתי תבניות דיפרנציאליות $\phi(x) = \sum_I \phi_I(x)dx_I$ ו $\psi(x) = \sum_I \psi_I(x)dx_I$ מאותו סדר k ניתן לחבר באופן טבעי:

$$\phi(x) + \psi(x) = \sum_I \left(\phi_I\left(x\right) + \psi_I\left(x\right)\right) dx_I$$

הערה 1.4 עבור $I = \left(i_1, \ldots, i_k\right)$, קיים סימון נוסף שלעיתים דיי שימושי: $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. כלמר, dx_I הופכת להיות למכפלה של dx_{i_r}. נשים לב שהמכפלה $\wedge$ מקיימת את התכונות הבאות:

1. $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} = -dx_{i_2} \wedge dx_{i_1}$
2. $dx_i \wedge dx_i = 0$

הגדרה 1.5 עבור $I=(i_1,\dots,i_k)$, $J=(j_1,\dots,j_l)$ נגדיר $dx_I\wedge dx_J=dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_l}$. כלמר, אנו מתאימים לפונקציות k־מולטילינארית וl־מולטילינארית פונקציה $k+l$ מולטילינארית. הכפל ניתן להרחיב על ידי המשכה לינארית לפונרציות מולטילינאריות. דהיינו:

$$\sum_I a_I dx_I\wedge\sum b_J dx_J=\sum_{I,J}a_I b_J dx_I\wedge dx_J .$$

באופן דומה מגדירים כפל של תבניות: עבור תבנית מסדר k, $\phi(x)=\sum_I\phi_I(x)\,dx_I$ ותבנית מסדר l, $\psi(x)=\sum_J\psi_j(x)dx_J$נגדיר

$$\phi\wedge\psi(x)=\sum_{I,J}\phi_I(x)\,\psi_J(x)\,dx_I\wedge dx_J.$$

הערה 1.6 לעיתים נשמיט את $\wedge$.

דוגמא: עבור $\phi=x^3ydx+ydy$, $\psi=x^4dx+xdy+z^2dz$, $\rho=xyzdzdx$ נקבל על ידי שימוש בזהויות

$$\begin{aligned}dxdy&=-dydz,\ dxdz=-dzdx,\ dydz=-dzdx\\ dxdx&=dydy=dzdz=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\psi&=(x^3ydx+ydy)(x^4dx+xdy+z^2dz)=\\ x^7dxdx+x^4ydxdy+x^3yz^2dxdz&+x^4ydydx+yxdydy+yz^2dydz=\\ .x^3yz^2dxdz&+yz^2dydz\end{aligned}$$

כמו כן:

$$\begin{aligned}\phi\rho&=\left(x^3ydx+ydy\right)(xydzdx)=x^4ydxdzdx+xy^2dzdxdy\\ &=xy^2dxdydz\end{aligned}$$

2 תכונות בסיסיות

משפט 2.1 יהיו ϕ תבנית מסדר k ו ψ תבנית מסדר l. אזי $\phi\wedge\psi=(-1)^{kl}\,\psi\wedge\phi$.

הוכחה: נשים לב ש $dx_J \wedge dx_I = (-1)^{kl}\, dx_J \wedge dx_I$ (J באורך l ו I באורך k) כי

$$
\begin{aligned}
&= dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_l} \\
&= (-1)^k\, dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \ldots \wedge dx_{j_l} \\
&= (-1)^{k\cdot 2}\, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_3} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l} \\
&\quad (-1)^{kl}\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}
$$

התוצאה מתקבלת על ידי המשכה לינארית. ■

תרגיל: תהי ϕ תבנית דיפרנציאלית מסדר k אי־זוגי. הוכח $\phi^2 = 0$

פתרון: $\phi^2 = \phi\phi = (-1)^{k^2}\, \phi\phi = (-1)^{k^2}\, \phi^2 = -\phi^2$. מכאן $2\phi^2 = 0$ וזה אומר ש$\phi^2 = 0$.

3 גזירה

נשים לב, שתבנית מסדר 0 היא פשוט פונקציה ממשית.

הגדרה 3.1 תהי F תבנית מסדר 0. אז דיפרנציאל של ϕ היא תבנית $dF = \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i} dx_i$.
תהי $\phi = \sum_I \phi_I dx_I$ k־תבנית ב C^1. אזי הדיפרנציאל שלה היא תבנית מסדר $k+1$ המוגדרת על ידי $d\phi = \sum_I d\phi_I \wedge dx_I$.

דוגמאות:

1. תהי $\phi = \left(x^2 + y^3 z\right) dx + \left(y^2 - 2xz\right) dy + (x^4 + y^3 - z^2) dz$. אזי

$$
\begin{aligned}
d\phi &= d(x^2+y^3z)dx + d(y^2-2xz)dy + d(x^4+y^3-z^2)dz \\
&= (2xdx + 3y^2zdy + y^3dz)dx \\
&+ (-2zdx + 2ydy - 2xdz)\, dy \\
&+ \left(4x^3dx + 3y^2dx - 2zdz\right) dz \\
&= 3y^2zdydx + y^3dzdx - 2zdxdy \\
&- 2xdzdy + 4x^3dxdz + 3y^2dydz \\
&= (-2z - 3y^2z)dxdy + (2x+3y^2)dydz + (y^3 - 4x^3)dzdx
\end{aligned}
$$

2. תהי $\psi = \left(x^2 + y^3 + z^4\right) dxdy + \left(x^2y^3z^4\right) dzdx + (x + 2y + 3z + 1)\, dxdy$ zd.

$$
\begin{aligned}
d\psi &= d(x^2+y^3+z^4)dydz + d(x^2y^3z^4)dzdx \\
&+ d(x+2y+3z+1)dxdy \\
&= \left(2xdx + 3y^2dy + 4z^3dz\right) dydz \\
&+ \left(2xy^3z^4dx + 3x^2y^2z^4dy + 4x^2y^3z^3dz\right) dzdx \\
&+ (dx + 2dy + 3dz)\, dxdy \\
&= (2x + 3x^2y^2z^4 + 3)dxdydz
\end{aligned}
$$

משפט 3.2 דיפרנציאל הוא לינארי כלומר $d(\alpha\phi+\beta\psi)=\alpha d\phi+\beta d\psi$.

משפט 3.3 תהי ϕ תבנית מסדר k ו ψ תבנית מסדר l. $d(\phi\wedge\psi)=(d\phi)\,\psi+(-1)^k\,\phi\wedge(d\psi)$

הוכחה: מספיק להוכיח עבור תבניות מהצורה $Adx_I\wedge Bdx_J$.
מתקיים $Adx_I\wedge Bdx_J=ABdx_I\wedge dx_J$.

$$\begin{aligned}
d(AB)dx_I\wedge dx_J &= \sum_{i=1}^{n}(AB)'_{x_1}\,dx_i\wedge(dx_I\wedge dx_J)= \\
\sum_{i=1}^{n}\left(A'_{x_i}B+AB'_{x_i}\right)dx_i\wedge(dx_I\wedge dx_J) &= \sum_{i=1}^{n}(A_{x_i}dx_i)\wedge dx_I\wedge Bdx_J+ \\
\sum_{i=1}^{n}(AB'_{x_i}dx_i)\wedge dx_I\wedge dx_J &= \\
dA\wedge Bdx_J+(-1)^kAdx_I\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}(B'_{x_i}dx_i)\wedge dx_J\right) &= \\
d(Adx_I)\wedge Bdx_J+(-1)^k\,Adx\wedge d(Bdx_J)
\end{aligned}$$

■