בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ג, מועד ב' -פתרון

6.9.2023, כ' באלול התשפ"ג

מרצים: אריאל ויצמן, אלעד עטייא, דורון פרלמן, ארז שיינר.
מתרגלים: שירה גרינשטיין, רועי חסון, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל, פבל שטיינר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (30 נק') תזכורת: ההפרש הסימטרי של קבוצות A,B מוגדר להיות:

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל קבוצה A מתקיים: $P(A)\cap P(P(A))=\{\emptyset\}$.

הפרכה:

ניקח $A=\{1,\{1\}\}$ ונקבל שמכיון ש $\{1\}\in A$ אז $\{\{1\}\}\in P(A)$, ומכיון ש $1\in A$ אז $\{1\}\in P(A)$ ואז $\{\{1\}\}\in P(P(A))$, ולכן

$$\{\{1\}\}\in P(A)\cap P(P(A))$$

(ב) לכל קבוצות A,B,C מתקיים: $A\Delta(B\cup C)=(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$.

הפרכה:

הפרכה: ניקח

$$A=\{1,2\},B=\{1\},C=\{2\}$$

ונקבל

$$A\Delta(B\cup C)=A\Delta A=\emptyset$$

ומצד שני

$$(A\Delta B)\cup(A\Delta C)=\{2\}\cup\{1\}=\{1,2\}$$

(ג) לכל קבוצות A,B,C מתקיים: $A\setminus B=A\setminus C$ אם ורק אם $A\cap B=A\cap C$.

הוכחה:

מימין לשמאל: יהי $x\in A\cap B$ אז $x\in A\wedge x\in B$, ולכן $x\notin A\setminus B$, ולפי הנתון נקבל $x\notin A\setminus C$, ולכן (מכיון ש $x\in A$) מתחייב $x\in C$, ולכן $x\in A\cap C$. ההכלה ההפוכה דומה (להחליף בין האותיות B,C).

משמאל לימין: יהי $x\in A\setminus B$, לכן $x\in A\wedge x\notin B$, ולכן $x\notin A\cap B$, ולכן לפי הנתון $x\notin A\cap C$, ומכיון ש $x\in A$ מתחייב $x\notin C$ ולכן $x\in A\setminus C$. ההכלה ההפוכה דומה.

2. (8 נק') לכל $1\leq n\in\mathbb{N}$ נגדיר:

$$S_n=\{(A,B)\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\mid A\cup B=\{1,\ldots,n\}\}$$

הוכיחו שלכל $1\leq n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$|S_n|=3^n$$

פתרון:

באינדוקציה על n: עבור $n=1$ נקבל:

$$S_1=\{(\{1\},\{1\}),(\emptyset,\{1\}),(\{1\},\emptyset)\}$$

ואכן יש שלושה איברים. נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

בS_n יש 3^n זוגות מהצורה (A,B) כך ש $A\cup B=\{1,\ldots,n\}$, כל זוג כזה נותן לנו שלושה זוגות חדשים עבור S_{n+1}:

א. $(A\cup\{n+1\},B)$. באופן הכי פורמלי, זו פונקציה הפיכה $f:S_n\to\{(X,Y)\in S_{n+1}\mid n+1\in X\wedge n+1\notin Y\}$, ולכן יש 3^n זוגות מהצורה הזו (ש $n+1$ נמצא רק בשמאלית).

ב. $(A,B\cup\{n+1\})$. באופן הכי פורמלי, זו פונקציה הפיכה $f:S_n\to\{(X,Y)\in S_{n+1}\mid n+1\notin X\wedge n+1\in Y\}$, ולכן יש 3^n זוגות מהצורה הזו (ש $n+1$ נמצא רק בימנית).

ג. $(A\cup\{n+1\},B\cup\{n+1\})$. באופן הכי פורמלי, זו פונקציה הפיכה $f:S_n\to\{(X,Y)\in S_{n+1}\mid n+1\in X\wedge n+1\in Y\}$, ולכן יש 3^n זוגות מהצורה הזו (ש $n+1$ נמצא גם בשמאלית וגם בימנית).

בסה"כ מכיון ששלושת הצורות הללו זרות, ומכיון ש $n+1$ נמצא או רק בימנית או רק בשמאלית או בשתיהן (כלומר עברנו על כל המקרים) נקבל לפי הנחת האינדוקציה:

$$|S_{n+1}|=3\cdot 3^n=3^{n+1}$$

3. (28 נק') נתבונן ביחס "מחלק את" על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$:

$$R=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid \exists c\in\mathbb{N}:b=ac\}$$

הערה: הביטויים מינימלי, מקסימלי, קטן ביותר, גדול ביותר, אינפימום וסופרימום בשאלה זו הם בהקשר ליחס "מחלק את".

(א) הוכיחו כי R יחס סדר חלקי.

(ב) מצאו תת-קבוצה $A\subseteq\mathbb{N}$ כך ש: קיים $s=\sup A$ וגם $s\notin A$.

(ג) מצאו תת-קבוצה $B\subseteq\mathbb{N}$ כך שבקבוצה B יש איבר מקסימלי יחיד ואין בה איבר גדול ביותר.

(ד) תהא $X\subseteq\mathbb{N}$. הוכיחו שאם יש בקבוצה X איבר מינימלי יחיד אז הוא הקטן ביותר ב-X.

פתרון:

א. רפלקסיבי: $a=1\cdot a$. טרנזיטיבי: אם $b=ka,c=mb$ נקבל $c=(mk)a$. אנטי-סימטרי: אם $b=ka,a=kb$ נקבל $b=k^2b$ ולכן $k^2=1$ ומכיון שהוא טבעי נקבל $k=1$ ולכן $a=b$.

ב. ניקח $A=\{2,3\}$. נשים לב שx חסם מלעיל אם ורק אם $x=2k,x=3m$, כלומר הוא כפולה של 2 וגם של 3 ולכן כפולה של 6. נקבל שx חסם מלעיל אם ורק אם $6|x$, ולכן נקבל $\sup A=6$. בנוסף כמובן $6\notin A$.

ג. ניקח

$$B=\{2^n\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{3\}$$

ונקבל ש3 איבר מקסימלי יחיד שאיננו גדול ביותר (הוא לא מימן לאף חזקה של 2).

ד. תהא X ונניח שיש $x\in X$ מינימלי יחיד. נוכיח שהוא קטן ביותר: יהי $y\in X$ צריך להוכיח $x|y$. נתבונן בקבוצה

$$Z=\{z\in X\mid \exists m\in\mathbb{N}:y=mz\}$$

כלומר קבוצת מחלקי y מתוך X. $y\in Z$ ולכן היא לא ריקה. מצד שני, היא סופית (יכולים להיות במחלק של y רק את הגורמים הראשוניים של y עם חזקות קטנות או שוות לחזקות בy). לכן יש בZ איבר מינימלי, נסמנו a.

טענה: a מינימלי בX: אכן, אם יש $b\in X$ כך ש $b|a$ אז נקבל $b|y$ ואז $b\in Z$ ומכיון שa מינימלי בZ נקבל $b=a$ (הגדרת מינימלי). קיבלנו שa מינימלי בX ומכיון שx מינימלי יחיד נקבל $a=x$. כעת, מכיון ש $a\in Z$ נקבל $a|y$ מה שאומר $x|y$.

4. (21 נק') על $X=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצת הפונקציות מהממשיים לעצמם) נגדיר יחס $\sim$ באופן הבא:

$$f\sim g\iff \exists y\in\mathbb{R}\forall x>y:f(x)=g(x)$$

ידוע כי $\sim$ הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).

(א) נתבונן בפונקציות $g(x)=x+1,h(x)=x+2$. הוכיחו כי $g\notin[h]_\sim$.

(ב) תהא $f \in [Id]_\sim$ (כאשר $[Id]_\sim$ היא מחלקת השקילות של פונקציית הזהות), נסמן בA את קבוצת נקודות השבת של f:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}$$

קבעו והוכיחו האם $|A|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^\aleph$, או אחרת.

(ג) תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. קבעו והוכיחו האם $|[f]_\sim|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^\aleph$, או אחרת.

פתרון:

א. כדי להראות זאת יש להראות $g \nsim h$. כלומר, להראות שהטענה $\exists y \in \mathbb{R} \forall x > y : g(x) = h(x)$ לא מתקיימת: אכן, נראה שהשלילה מתקיימת: לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x > y$ כך ש $g(x) \neq h(x)$, כי נוכל לבחור $x = y + 1$ ונקבל

$$g(x) = g(y+1) = y + 1 + 1 = y + 2 \neq y + 3 = h(y+1) = h(x)$$

ב. נראה ש $|A| = \aleph$. מצד אחד ברור $A \subseteq \mathbb{R}$ ולכן $|A| \leq \aleph$. מצד שני, מכיון ש $f \in [Id]_\sim$, נקבל $f \sim Id$. לפי ההגדרה של $\sim$ נקבל שקיים $y \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > y$ מתקיים:

$$f(x) = Id(x) = x$$

לכן בפרט לכל $x \in (y, \infty)$ נקבל

$$f(x) = x$$

ולכן $A \subseteq (0, \infty)$, ולכן:

$$\aleph = |(0, \infty)| \leq |A|$$

בסה"כ לפי קש"ב $|A| = \aleph$.

ג. טענה:

$$|[f]_\sim| = 2^\aleph$$

הוכחה: מצד אחד $[f]_\sim \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$ ולכן ברור $|[f]_\sim| \leq \aleph^\aleph = 2^\aleph$.

מצד שני, נגדיר

$$\varphi : \mathbb{R}^{(-\infty, 0]} \to [f]_\sim$$

ע"י

$$\varphi(g)(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases}$$

ראשית, $\varphi(g) \in [f]_\sim$ מכיון שלכל $x > 0$ מתקיים $\varphi(g)(x) = f(x)$, ולכן קיים y הלא הוא 0.

בנוסף, היא (φ) חח"ע: אם $g_1 \neq g_2$ אז קיים $x \leq 0$ כך ש $g_1(x) \neq g_2(x)$ ולכן נקבל גם $\varphi(g_1)(x) \neq \varphi(g_2)(x)$.

5. (18 נק') יהי $0 < r \in \mathbb{R}$, תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא <u>r-דלילה</u> אם לכל $a \neq b \in A$ מתקיים ש $|a - b| > r$.
תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא <u>דלילה</u> אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש A היא r-דלילה.

(א) יהי n טבעי, ותהיינה $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות דלילות. הוכיחו שהחיתוך $\bigcap_{i=1}^n A_i$ הוא קבוצה דלילה.

פתרון:

לכל $1 \leq i \leq n$, מכיון שהקבוצה A_i היא דלילה זאת אומרת שקיים $r_i > 0$ כך שהיא r_i-דלילה. ניקח $r = \min\{r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ונטען שהקבוצה $\bigcap_{i=1}^n A_i$ היא r-דלילה: יהיו $a \neq b \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, לכן לכל $1 \leq i \leq n$ נקבל $a, b \in A_i$ ולכן (מהגדרתה כ r_i-דלילה) נקבל $|a - b| > r_i \geq r$, מש"ל.

(ב) יהי $0 < r \in \mathbb{R}$. הוכיחו שכל קבוצה A שהיא r-דלילה היא בת-מנייה.
פתרון:
נרצה להגדיר $f : A \to \mathbb{Q}$ חח"ע. לכל $a \in A$ נגדיר

$$B_a = \left(a - \frac{r}{2}, a + \frac{r}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

ונשים לב ש $B_a \neq \emptyset$ כי זה קטע פתוח לא ריק ולכן מכיל מספר רציונאלי. לפי אקסיומת הבחירה קיימת פונקציה

$$f : A \to \bigcup_{a \in A} B_a$$

כך שלכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \in B_a$. נראה ש-f זו חח"ע וסיימנו: נניח $f(a) = f(b)$, ונסמן $x = f(a) = f(b)$. מכיון שזו פונקצית בחירה נקבל $x \in B_a \cap B_b$. נשים לב שמכיון ש $x \in B_a$ נקבל $|x - a| < \frac{r}{2}$, ובדומה מכיון ש $x \in B_b$ נקבל $|b - x| < \frac{r}{2}$, וביחד:

$$|a - b| \leq |a - x| + |x - b| = r$$

ומכיון שA היא r-דלילה זה גורר $a = b$.

(ג) יהי $0 < r \in \mathbb{R}$. הוכיחו שקיימת תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ שהיא r-דלילה, ובנוסף לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $|x - a| < r$.
פתרון:
נוכל לקחת את הקבוצה הבאה:

$$A = \left\{\frac{3}{2}mr \mid m \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{0, \pm\frac{3}{2}r, \pm 3r, \dots\right\}$$

היא r-דלילה מכיון שלכל $a \neq b \in A$ נקבל

$$|a - b| \geq \frac{3}{2}r > r$$

כעת צריך להוכיח שלכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $|x - a| < r$: יהי $x \in \mathbb{R}$, אם $x \in A$ אז נוכל לבחור $a = x$. אחרת, קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $\frac{3}{2}mr < x < \frac{3}{2}(m+1)r$, ואז מכיון ש

$$\left|\frac{3}{2}(m+1)r - \frac{3}{2}mr\right| = \frac{3}{2}r$$

נקבל שבה"כ

$$\left|x - \frac{3}{2}mr\right| \leq \frac{3}{4}r < r$$

(כלומר, המרחק בין x לאחד הקצוות הוא לכל היותר $\frac{3}{4}r$, בה"כ זה על בחירת הקצה). ונבחר $a = \frac{3}{2}mr$.