בוחן מתמטיקה בדידה, חורף תשעח

26.12.2017

מתרגל: אחיה בר־און.

- **כתבו בדף הראשון את שמכם והת.ז. שלכם בצורה ברורה.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו כל תשובה.
- בבוחן 4 שאלות. כל אחת שווה 30 נקודות.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות עליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
4	
total	

בהצלחה!

1. (30 נק') נגדיר קשר $\Diamond$ עבור תחשיב הפסוקים ע"י טבלת האמת הבאה:

A	B	$A\Diamond B$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

הגשימו את <u>אחד</u> הקשרים $\vee, \rightarrow$ באמצעות הקשר $\Diamond$.

פתרון : נסתכל על טבלת אמת הבאה,

A	B	$A\Diamond B$	$A\Diamond(A\Diamond B)$	$B\Diamond A$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

רואים כי $A \rightarrow B \equiv B\Diamond A$ ו $A \vee B \equiv A\Diamond(A\Diamond B)$

המשך תשובה לשאלה 1

2. (30 נק') הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים כי 5 מחלק את המספר $2^{3n} - 3^n$ (ללא שארית). כלומר, לכל n טבעי מתקיים כי $\frac{2^{3n}-3^n}{5}$ מספר שלם.

פתרון : בסיס האינדוקציה $n=0$: אכן מתקיים כי 5 מחלק את 0 $= 2^{3\cdot 0} - 3^0$.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות הטענה עבור n מסוים. נוכיח כי הטענה עבור $n+1$. נחשב

$$2^{3(n+1)} - 3^{n+1} = 2^{3n+3} - 3^{n+1} = 8\cdot 2^{3n} - 3\cdot 3^n = 5\cdot 2^{3n} + 3\cdot 2^{3n} - 3\cdot 3^n = 5\cdot 2^{3n} + 3\cdot\left(2^{3n} - 3^n\right)$$

ולכן

$$\frac{2^{3(n+1)} - 3^{n+1}}{5} = \frac{5\cdot 2^{3n} + 3\cdot\left(2^{3n} - 3^n\right)}{5} = 2^{3n} + 3\cdot\frac{\left(2^{3n} - 3^n\right)}{5}$$

שהינו מספר שלם כי לפי הנחת האינדוקציה $\frac{\left(2^{3n}-3^n\right)}{5}$ מספר שלם.

המשך תשובה לשאלה 2

3. (30 נק') תהא $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית ונתון כי קיים x איבר גדול ביותר ב $(A,\leq)$. נסמן $R=\leq^{-1}$ את היחס ההפוך של $\leq$.
הוכיחו כי קיים איבר מינימאלי יחיד ב (A,R) (שימו לב שצריך להוכיח שני דברים־ להוכיח כי קיים איבר מינימאלי ב (A,R) ולהוכיח שהוא יחיד).

פתרון : נוכיח כי x איבר מינימאלי ב (A,R). אכן נניח שעבור $y\in A$ מתקיים yRx ונראה כי $x=y$. אכן אם yRx אזי $x\leq y$ כיוון ש x איבר גדול ביותר ב $(A,\leq)$ מתקיים גם $y\leq x$. כיוון ש $\leq$ יחס סדר ובפרט אנטי סימטרי נקבל כי $x=y$.

נוכיח כי x הוא מינימאלי יחיד ב (A,R). אכן נניח כי x' מינימאלי ב (A,R) ונראה כי $x=x'$. כיוון ש x איבר גדול ביותר ב $(A,\leq)$ מתקיים גם $x'\leq x$ ולכן xRx' כיוון ש x' מינימאלי ב (A,R) נקבל כי $x=x'$.

המשך תשובה לשאלה 3

4. תהא $X=\{n\in\mathbb{N}\,|\,1\le n\le 10\}$ ותהא $A=P(X)$ (כלומר A קבוצת החזקה של X).
תהא $B=\{2,5,9,10\}$ נגדיר יחס R על A כדלקמן

$$R=\{(a,a')\in A\times A\,|\,B\subseteq(a\cap a')\}\cup I_A$$

כאשר $I_A=\{(a,a)\,|\,a\in A\}$ הוא יחס הזהות על A.

(א) (15 נק') הוכיחו כי R יחס שקילות על A.

פתרון : נסמן $S=\{(a,a')\in A\times A\,|\,B\subseteq(a\cap a')\}$ ואז $R=S\cup I_A$.

רפלקסיביות: לכל $a\in A$ מתקיים כי $(a,a)\in I_A\subseteq R$ ולכן $(a,a)\in R$

סימטריות: נניח $(a,a')\in R$ צ"ל $(a',a)\in R$. אכן, אם $a=a'$ סיימנו. אחרת $(a,a')\in S$ ואז $B\subseteq(a\cap a')$ ולכן $B\subseteq(a'\cap a)$ לכן $(a',a)\in S\subseteq R$.

טרנזיטיביות: נניח $(a,a'),(a',a")\in R$ צ"ל $(a,a")\in R$. אם $a=a'$ או $a'=a"$ סיימנו. אחרת, $(a,a'),(a',a")\in S$ ואז $B\subseteq(a\cap a')$ וגם $B\subseteq(a'\cap a")$ ואז

$$B\subseteq(a\cap a')\cap(a'\cap a")\subseteq(a\cap a")$$

שזה גורר $(a,a")\in S\subseteq R$.

(ב) (15 נק') כמה איברים יש בקבוצת המנה ${}^{A}/_{R}$? נמקו תשובתכם.

פתרון : נשים לב כי aRa' אמ"מ $a=a'$ או B מוכל ב $a\cap a'$ אמ"מ $a=a'$ או B מוכל ב a,a'.

לכן עבור $a\in A$ מתקיים כי:

i. אם $B\subseteq a$ אז aRB (כי $B\subseteq(a\cap B)$) ולכן מחלקת השקילות של a שווה למחלקת השקילת של B שהיא $[a]=\{a'\in A:\,B\subseteq a'\}=[B]$

ii. אם a לא מכיל את B אזי מחלקת השקילות של a היא $[a]=\{a\}$

לכן

$${}^{A}/_{R}=\{[a]:\,a\in A\}=\{[B]\}\cup\{\{a\}:\,B\nsubseteq a\in A\}$$

כלומר מספר האיברים ב ${}^{A}/_{R}$ שווה למספר האיברים ב $\{a\in A:\,B\nsubseteq a\}$ ועוד אחד. מתקיים כי $\{a\in A:\,B\nsubseteq a\}=A\backslash\{a\in A:\,B\subseteq a\}$ ולכן נחשב את מספר האיברים $\{a\in A:\,B\subseteq a\}$. כל איבר a שמכיל את B הוא מהצורה $a=B\cup C$ עבור $C\subseteq X\backslash B$ ולכן

$$|\{a\in A:\,B\subseteq a\}|=|P(X\backslash B)|=2^{|X\backslash B|}=2^6$$

כאשר הסימון $|Y|$פירושו מספר האיברים ב Y. כעת, מספר האיברים בקבוצה $\{a\in A:\,B\nsubseteq a\}$ שווה ל

$$|A|-|\{a\in A:\,B\subseteq a\}|=|P(X)|-2^6=2^{10}-2^6$$

לכן התשובה הסופית היא $|{}^{A}/_{R}|=1+2^{10}-2^6=1024-63=961$.

המשך תשובה לשאלה 4