

אלגברה לינארית הרחבת הסמכה (בן גוריון), סמטסטר ב' תש"פ

מבחן לדוגמה

מרצה: אחיה בר-און.
מתרגל: ד"ר דניס גלוקו.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל 4 השאלות .
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! 😊

1.

(א) נתונה מערכת משוואות לינאריות (מעל \mathbb{R}) התלויה בפרמטר k .

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ -kx_1 + (2 - 3k)x_2 - 2x_3 + (k + 1)x_4 & = -k \\ 3x_1 + 3kx_2 + (k^2 + 2)x_3 - 3x_4 & = 4 \end{cases}$$

i. קבעו לאילו ערכי k יש למערכת הבאה פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות. נמקו כל קביעה.
ii. עבור $k = 0$, מצאו את כל הפתרונות למערכת הנתונה בשאלה.

(ב) יהא $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ויהיו W_1, W_2, W_3 ת"מ. הוכיחו/הפריכו:

i. מתקיים $W_1 \cap (W_2 + W_3) \subseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.
ii. מתקיים $W_1 \cap (W_2 + W_3) \supseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.

2. נגדיר את המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ התלויה בפרמטר a .

(א) עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה

(ב) עבור איזה ערך a (אם בכלל) מתקיים כי

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

עבור ערך זה, קבעו האם A^2 הפיכה ואם כן, מצאו את ההופכית של A^2 .

3.

(א) מצאו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 2 - a \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(ב) יהא V מ"ו ויהיו $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ קבוצה וקטורים שפורשים את V . הוכיחו/הפריכו:

i. הקבוצה $\{2v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_1 + v_4\}$ פורשת את V גם כן.
ii. אם $\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\{v_3, v_4\}$ אז $\dim V \leq 2$.

4.

(א) יהיו

$$W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\}, W_2 = \text{span}\{3 + 2x - x^2, 1 + 3x\}$$

שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}_2[x]$.

i. הציגו את W_2 ע"י משוואות.

ii. מצאו בסיס ל $W_1 \cap W_2$ ומצאו את המימד של $W_1 + W_2$.

(ב) יהא V מ"ו ויהיו $L_1 = v_1 + W_1, L_2 = v_2 + W_2$ שני ישרים שונים שנחתכים (כלומר $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$). הוכיחו:

i. $\dim(W_1 + W_2) = 2$

ii. קיים מישור L כך ש $L_1, L_2 \subseteq L$

iii. אם L' מישור כך ש $L_1, L_2 \subseteq L'$ אז $L = L'$

(במילים: שני ישרים שנחתכים - קובעים מישור יחיד).