

תרגול כיתה 9 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
משתנה מקרי רציף, טרנספורמציות

תכונות פונקציית הצפיפות f (של מ"מ רציף X):

$$1) f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

חישוב פונקציית ההתפלגות המצטברת F (של מ"מ רציף X):

$$1) F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

התוחלת והשונות של מ"מ רציף X :

♦ התוחלת: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$

♦ השונות: $Var(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$

שאלה 1

נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי X :

$$f(x) = \begin{cases} cx^n & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , else \end{cases}$$

(א). חשב את c .

(ב). מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F_X(x)$.

(ג). חשב את $P(X \geq a)$ לכל $0 \leq a \leq 1$.

פתרון:(א). מציאת c :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 cx^n dx = \frac{cx^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{c}{n+1}$$

ולכן, $\boxed{c = n+1}$.

(ב). פונקציית ההתפלגות המצטברת,

$$F_X(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (n+1)t^n dt = t^{n+1} \Big|_0^x = x^{n+1}$$

(ג). ההסתברות בסעיף זה היא המשלימה של ההסתברות בסעיף ב',

$$.P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F_X(a) = 1 - a^{n+1}$$

שאלה 2פונקציית הצפיפות של X היא:

$$f(t) = \begin{cases} at^2 + bt & , 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , else \end{cases}$$

כאשר a, b קבועים ממשיים.נתון בנוסף: $E[X] = 0.6$. חשב:

$$P(X \leq \frac{1}{2}) \quad .(א)$$

(ב). השונות $Var(X)$ פתרון:ראשית, נמצא את a ו- b .

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_0^1 (at^2 + bt) dt = \frac{a}{3} t^3 + \frac{b}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$$

$$0.6 = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t) dt = \int_0^1 (at^3 + bt^2) dt = \frac{a}{4} t^4 + \frac{b}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3}$$

לכן $0.2 = -\frac{a}{12}$, כלומר $\boxed{a = -2.4}$, וכן $\boxed{b = 3.6}$.

(א). ההסתברות המבוקשת:

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{0.5} (-2.4t^2 + 3.6t) dt = -0.8t^3 + 1.8t^2 \Big|_0^{0.5} = -0.2 + 0.45 = 0.25$$

(ב). השונות:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - [E(X)]^2 = \int_0^1 (-2.4t^4 + 3.6t^3) dt - 0.36 =$$

$$-0.48t^5 + 0.9t^4 \Big|_0^1 - 0.36 = -0.48 + 0.9 - 0.36 = 0.06$$

שאלה 3

נתון קטע ממשי שאורכו 1. בוחרים באקראי נקודה על הקטע, בעזרת פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & , 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , else \end{cases}$$

מהי ההסתברות שהנקודה תחלק את הקטע לשני חלקים כך שהיחס בין החלק הקצר לחלק הארוך קטן מ- $\frac{1}{4}$?פתרון:הנקודה a שעבורה הקטע השמאלי $[0, a]$ הוא ארוך פי ארבע מהקטע הימני $[a, 1]$ מקיימת $4 = \frac{a}{1-a}$,כלומר $a = 4 - 4a = a$ ולכן $a = \frac{4}{5}$. לפיכך, הסיכוי שהקטע השמאלי לפחות פי 4 ארוך מהימני הוא

$$\int_{\frac{4}{5}}^1 2t dt = t^2 \Big|_{\frac{4}{5}}^1 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

כמוכן, הנקודה a שעבורה הקטע השמאלי $[0, a]$ הוא קצר פי ארבע מהקטע הימני $[a, 1]$ מקיימת $\frac{1}{4} = \frac{a}{1-a}$,כלומר $1 - a = 4a$ ולכן $a = \frac{1}{5}$.

(הערה: ניתן גם להפעיל שיקולי סימטריה)

הסיכוי שהקטע השמאלי לפחות פי 4 קצר מהימני הוא $\int_0^{\frac{1}{5}} 2t dt = t^2 \Big|_0^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}$

סך-הכל, הסיכוי שהקטע הקצר הוא לפחות פי 4 קצר מהקטע הארוך הוא $\frac{9}{25} + \frac{1}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

שאלה 4

זמן החיים (בחודשים) של שופרת אלקטרונית הוא משתנה מקרי X שצפיפותו

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & 0 \leq t \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

(א). מהי תוחלת זמן-החיים של שופרת?

(ב). במכשיר פועלות 10 שופרות ב"ת. מה הסיכוי שלפחות לשתיים מהן יהיה זמן חיים של יותר מ- 3 חודשים?

פתרון:

(א).

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 2$$

(ב). ההסתברות ששופרת תפעל יותר מ-3 חודשים היא.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \int_0^3 te^{-t} dt = 1 - \left[-(1+t)e^{-t} \right]_0^3 \approx 0.2$$

יהי Y מ"מ הסופר את מס' השופרות הפועלות מתוך ה-10. מאחר והשופרות ב"ת,

אזי $Y \sim \text{Bin}(10, 0.2)$, לכן

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.2^0 0.8^{10} + \binom{10}{1} 0.2^1 0.8^9 \right] = 0.624 \end{aligned}$$

טרנספורמציה של משתנה מקרי חד-מימדי רציףשאלה 5

(א). נתון שהמ"מ הרציף X הוא בעל פונ' הצפיפות $f_X(x) = 1$, $(0 < x < 1)$.

נגדיר מ"מ $Z = 4X + 1$. מצא את פונ' ההתפלגות ואת פונ' הצפיפות של Z .

(ב). יהי X משתנה עם צפיפות $f_X(x) = 2xe^{-x^2}$, $(x > 0)$. מצא את הצפיפות של $Y = X^2$.

פתרון:

(א). נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת תחילה:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(4X + 1 \leq z) = P\left(X \leq \frac{z-1}{4}\right) = F_X\left(\frac{z-1}{4}\right)$$

פונ' ההתפלגות המצטברת של X : $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-0}{1-0} = x$, לכן-

$$F_Z(z) = F_X\left(\frac{z-1}{4}\right) = \frac{z-1}{4} \quad (1 < z < 5)$$

פונ' הצפיפות מתקבלת מגזירת פונ' ההתפלגות המצטברת:

$$f_z(z) = \frac{d[F_Z(z)]}{dz} = \frac{d[(z-1)/4]}{dz} = \frac{1}{4} \quad (1 < z < 5)$$

באופן כללי: אם $Z = aX + b$, $X \sim U(0,1)$

$$f_z(z) = [F_Z(z)]' = \left[F_X\left(\frac{z-b}{a}\right)\right]' = f_x\left(\frac{z-b}{a}\right) \cdot \left(\frac{z-b}{a}\right)' = 1 \cdot \frac{1}{a} = \left|\frac{1}{a}\right|$$

(ב). לכל y ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

נגזור את האגפים ונקבל-

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}))$$

נציב את $f_X(x) = 2xe^{-x^2}$. מאחר והתחום הוא $X > 0$ אזי החלק השלילי מתאפס. נקבל-

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} 2\sqrt{y} \cdot e^{-(\sqrt{y})^2} = e^{-y}$$