פיסיקה למתמטיקאים

משוואות אויילר לגראנג'

1. מסה m חופשית לנוע על שולחן חסר חיכוך ומחוברת ע"י מיתר דרך חור בשולחן, למסה נוספת M. המסה M נעה אנכית בלבד והמיתר נותר מתוח בזמן התנועה.

(א) כתבו את הלגראנג'יאן L ומצאו את משוואות התנועה
האנרגיה הקינטית נתונה ע"י

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{1}$$

והפוטנציאל נתון ע"י

$$U = -Mg(\ell - r) \tag{2}$$

ולכן הלגראנג'יאן הוא

$$L = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Mg(\ell - r). \tag{3}$$

משוואות התנועה הן

$$(M+m)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \tag{5}$$

גם בבעיה זו θ קורדינטה ציקלית ולכן התנע הזויתי $J = mr^2\dot{\theta}$ נשמר. מהצבת התנע הזויתי ב (4) נקבל

$$(M+m)\ddot{r} = \frac{J^2}{mr^3} - Mg. \tag{6}$$

(ב) מצאו תנאי על נקודת שווי המשקל (רדיוס המעגל r_0) עבורו m מבצעת תנועה מעגלית

על מנת שתתבצע תנועה מעגלית עם רדיוס r_0, נדרוש $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. מהצבה של r_0 באגף ימין של (6) נקבל את תנאי שווי המשקל

$$r_0^3 = \frac{J^2}{Mmg}. \tag{7}$$

(ג) מצאו את תדירות התנודות הקטנות ביחס לשווי המשקל

תהי $\delta(t)$ סטייה קטנה ממצב שווי המשקל ($\delta << r_0$). נציב $r = r_0+\delta$ ב (6) ונקבל (עד לסדר ראשון ב δ)

$$(M+m)\ddot{\delta} = \frac{J^2}{mr_0^3}\left(1-\frac{3\delta}{r_0}\right) - Mg \tag{8}$$

ומהצבת תנאי שווי המשקל (7) נקבל את משוואת התנועה

$$\ddot{\delta} + \frac{3J^2}{mr_0^4(M+m)}\delta = 0. \tag{9}$$

משוואה (9) מתארת תנודות קטנות ביחס לנקודת שווי המשקל עם תדירות

$$\Omega = \sqrt{\frac{3M}{M+m}}\sqrt{\frac{g}{r_0}}. \tag{10}$$