תרגיל 2

25 בדצמבר 2016

תרגיל 1. בתרגיל הבא תתבקשו להוכיח כמה מן התכונות של חבורות ציקליות.

1. תהיינה G,H חבורה ציקליות מסדר m כך ש $G=\langle a\rangle, H=\langle b\rangle$. נגדיר $\phi:G\to H$ על ידי $\phi\left(a^{n}\right)=b^{n}$. הוכיחו ש ϕ הוא איזומורפיזם והסיקה שכל שתי חבורות ציקליות מאותו סדר הן איזומורפיות.
2. תהי G חבורה ציקלית מסדר n. הוכיחו שכל תת-חבורה H של G איזומורפית ל $\mathbb{Z}_d$ עבור d שמחלק את n. (הדרכה השתמשו במשפט שאומר שכל תת-חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית ובמשפט לה-גרנז' שאומר שסדר של תת-חבורה מחלק את הסדר של חבורה.)
3. תהי G חבורה ציקלית מסדר n, a יוצר של G. יהי $a^{k}\in G$. מצאו את הסדר של a^{k} ב gבבמונחים של המחלק המשותף מקסימלי או כפולה משותפת מינימלית (הדרכה: כפולה משותפת מינימלית של k ו n, $lcm\left(k,n\right)$ הוא המספיר החיובי הקטן ביותר שמתחלקה גם ב a וגם ב b. מתקיים השוויון $gcd\left(k,n\right)\cdot lcm\left(k,n\right)=k\cdot n$. חשבו מה היא החזקה המינימלית d של a^{k} עבורה $a^{kd}=\left(a^{k}\right)^{d}$ מתאפס).
4. תהי G חבורה ציקלית מסדר n בעלת יוצר a. בעזרת תרגיל הקודם, מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש a^{k} אף הוא יוצר של G. (הדרכה: זהו תנאי שקול לכך שהסדר של a^{k} הוא n. השתמשו בתרגיל הקודם).
5. תהי G חבורה ציקלית מסדר n, d ו m כך ש $dm=n$. הוכיחו יהי $a^{k}\in G$ כך ש k אינו כפולה של d או באופן שקול a^{k} אינו חזקה של a^{d}. הוכיחו שמתקיים $\left(a^{k}\right)^{m}\neq e$.
6. בעזרת הסעיף הקודם הראו שאם G היא חבורה ציקלית מסדר n אזי לכל m שמחלק את n קיימת תת-חבורה יחידה של G מסדר m.
7. מצאו את כל תתי-חבורות של $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ והראו שהטענה מהסעיף הקודם אינה נכונה עבור חבורות לא ציקליות.

תרגיל 2. רשמו את התמורות הבאות בכמכפלות של מחזורים זרים.

1. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&6&2&5&1&7\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 8 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 8 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

תרגיל 3. רשמו את התמורות הבאות (הנתונות כמחזורים) בצורת טבלא.

1. $(2\,4\,9\,3)\,(5\,7\,8)$
2. $(1\,5\,2\,8)\,(6\,3\,7)$

תרגיל 4. הכפילו כל שתי תמורות משאלות 2 מכל סדר ורשמו את התשובה בשתי דרכים (טלבא, ומכפלה של מחזורים).

תרגיל 5. נשים לב שמהמחזור $(1\,2\,3)$ ו $(2\,3\,1)$ למעשה מבטאים את אותה התמורה. חשבו בכמה דרכים ניתן לרשום תמורה באורך n. נמקו תשובתכם.

תרגיל 6. נזכיר שהגדרנו סימן של תמורה σ על ידי

$$\mathbf{sgn}\sigma=\frac{\Pi_{i<j}\left(x_i-x_j\right)}{\Pi_{i<j}\left(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}\right)}$$

1. הוכיחו שלכל שתי תמורות σ,τ מתקיים

$$\mathbf{sgn}\tau=\frac{\Pi_{i<j}\left(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}\right)}{\Pi_{i<j}\left(x_{\sigma\tau(i)}-x_{\sigma\tau(j)}\right)}.$$

הסיקו שמתקיים

$$\mathbf{sgn}\tau\mathbf{sgn}\sigma=\mathbf{sgn}\sigma\tau.$$

2. מחזור באורך 2 נקרא חילוף. למשל $(1\,2)$ הוא חילוף. חשבו סימן של חילוף.

3. יהי $(k_1\ldots k_m)$ מחזור בארוך n. הוכיחו שמתקיים

$$(k_1\ldots k_m)=(k_1\,k_2)\ldots(k_{m-1}\,k_m)$$

והסיקו שכל תמורה ניתן לכתוב כמכפלה של חילופים. (השתמשו בטענה שכל תמורה ניתן לכתוב כמכפלה של מחזורים זרים).

4. תתי σ תמורה. נסמן אורך של σ,

$$\mathbf{length}\sigma=\min_k\left\{\exists\left(x_1\,y_1\right),\ldots,\left(x_k\,y_k\right):\left(x_1\,y_1\right)\ldots\left(x_k\,y_k\right)=\sigma\right\}.$$

מינימום כזה מוגדר לפי שאלה 3 .

5. הוכיחו שמתקיים $\mathbf{sign}\sigma=(-1)^{\mathbf{length}\sigma}$ לכל תמורה.