# תרגיל 2

25 בדצמבר 2016

**תרגיל 1.** בתרגיל הבא תתבקשו להוכיח כמה מן התכונות של חבורות ציקליות.

1. תהיינה $G, H$ חבורה ציקליות מסדר $m$ כך ש $G = \langle a \rangle , H = \langle b \rangle$ . נגדיר $\phi : G \to H$ על ידי $\phi\left(a^n\right) = b^n$. הוכיחו ש $\phi$ הוא איזומורפיזם והסיקה שכל שתי חבורות ציקליות מאותו סדר הן איזומורפיות.

2. תהי $G$ חבורה ציקלית מסדר $n$. הוכיחו שכל תת-חבורה $H$ של $G$ איזומורפית ל $\mathbb{Z}_d$ עבור $d$ שמחלק את $n$. (הדרכה השתמשו במשפט שאומר שכל תת-חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית ובמשפט לה-גרנז' שאומר שסדר של תת-חבורה מחלק את הסדר של חבורה.)

3. תהי $G$ חבורה ציקלית מסדר $n$, $a$ יוצר של $G$. יהי $a^k \in G$. מצאו את הסדר של $a^k$ ב $g$בבמונחים של המחלק המשותף מקסימלי או כפולה משותפת מינימלית (הדרכה: כפולה משותפת מינימלית של $k$ ו $n$, $lcm\left(k,n\right)$ הוא המספיר החיובי הקטן ביותר שמתחלקה גם ב $a$ וגם ב $b$. מתקיים השוויון $gcd\left(k,n\right) \cdot lcm\left(k,n\right) = k \cdot n$. חשבו מה היא החזקה המינימלית $d$ של $a^k$ עבורה $a^{kd} = \left(a^k\right)^d$ מתאפס).

4. תהי $G$ חבורה ציקלית מסדר $n$ בעלת יוצר $a$. בעזרת תרגיל הקודם, מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש $a^k$ אף הוא יוצר של $G$. (הדרכה: זהו תנאי שקול לכך שהסדר של $a^k$ הוא $n$. השתמשו בתרגיל הקודם).

5. תהי $G$ חבורה ציקלית מסדר $n$, $d$ ו $m$ כך ש $dm = n$. הוכיחו יהי $a^k \in G$ כך ש $k$ אינו כפולה של $d$ או באופן שקול $a^k$ אינו חזקה של $a^d$. הוכיחו שמתקיים $\left(a^k\right)^m \neq e$.

6. בעזרת הסעיף הקודם הראו שאם $G$ היא חבורה ציקלית מסדר $n$ אזי לכל $m$ שמחלק את $n$ קיימת תת-חבורה יחידה של $G$ מסדר $m$.

7. מצאו את כל תתי-חבורות של $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ והראו שהטענה מהסעיף הקודם אינה נכונה עבור חבורות לא ציקליות.

**תרגיל 2.** רשמו את התמורות הבאות בכמכפלות של מחזורים זרים.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 8 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$ .2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 8 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$ .3

**תרגיל 3.** רשמו את התמורות הבאות (הנתונות כמחזורים) בצורת טבלא.

1. $(2\,4\,9\,3)\,(5\,7\,8)$
2. $(1\,5\,2\,8)\,(6\,3\,7)$

**תרגיל 4.** הכפילו כל שתי תמורות משאלות 2 מכל סדר ורשמו את התשובה בשתי דרכים (טלבא, ומכפלה של מחזורים).

**תרגיל 5.** נשים לב שמהמחזור $(1\,2\,3)$ ו $(2\,3\,1)$ למעשה מבטאים את אותה התמורה. חשבו בכמה דרכים ניתן לרשום תמורה באורך $n$. נמקו תשובתכם.

**תרגיל 6.** נזכיר שהגדרנו סימן של תמורה $\sigma$ על ידי

$$\mathbf{sgn}\sigma = \frac{\Pi_{i<j}\left(x_i - x_j\right)}{\Pi_{i<j}\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right)}$$

1. הוכיחו שלכל שתי תמורות $\sigma, \tau$ מתקיים

$$\mathbf{sgn}\tau = \frac{\Pi_{i<j}\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right)}{\Pi_{i<j}\left(x_{\sigma\tau(i)} - x_{\sigma\tau(j)}\right)}.$$

הסיקו שמתקיים

$$\mathbf{sgn}\tau\mathbf{sgn}\sigma = \mathbf{sgn}\sigma\tau.$$

2. מחזור באורך 2 נקרא חילוף. למשל $(1\,2)$ הוא חילוף. חשבו סימן של חילוף.

3. יהי $(k_1 \ldots k_m)$ מחזור בארוך $n$. הוכיחו שמתקיים

$$(k_1 \ldots k_m) = (k_1\,k_2) \ldots (k_{m-1}\,k_m)$$

והסיקו שכל תמורה ניתן לכתוב כמכפלה של חילופים. (השתמשו בטענה שכל תמורה ניתן לכתוב כמכפלה של מחזורים זרים).

4. תתי $\sigma$ תמורה. נסמן אורך של $\sigma$,

$$\mathbf{length}\sigma = \min_k \left\{\exists\,(x_1\,y_1), \ldots, (x_k\,y_k) : (x_1\,y_1) \ldots (x_k\,y_k) = \sigma\right\}.$$

מינימום כזה מוגדר לפי שאלה 3 .

5. הוכיחו שמתקיים $\mathbf{sign}\sigma = (-1)^{\mathbf{length}\sigma}$ לכל תמורה.