

פתרון מבחן מועד ג' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 25/05/17

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{(x^2)} - 1)^2}{\sin(3x)(1 - \cos(5x)) \ln(1+x)} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2}\right)^2}_{\rightarrow 1^2} \cdot \underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{(5x)^2}{1 - \cos(5x)}}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 5^2} = \frac{2}{3 \cdot 5^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\pi x}{4} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\pi}{4} \right) &= \left\{ \infty \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{0}{0}, L'Hopital \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{(1+x)^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{-1}{\left(\frac{1}{x} + 1\right)^2 + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{n^n} \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{(\sqrt[n]{n})^2 2}{n} \right)^n \rightarrow \left\{ \left(\frac{1^2 \cdot 2}{\infty} \right)^\infty = 0^\infty \right\} = 0$$

2.

א. חשבו את $\int x \arctan(x) dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{1}{x e^x} dx$

3. תהי f פונקציה מונוטונית עולה ממש, כלומר לכל $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x_1) < f(x_2)$.
 נניח בנוסף כי f גזירה בכל \mathbb{R} .
 א. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) \geq 0$.

יהי x_0 , נתון כי גזירה ב x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{>0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \geq 0$$

- ב. הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) > 0$.

הפרכה: $f(x) = x^3$ היא עולה ממש בכל הממשיים, אך $f'(0) = 0$.

4. תהי פונקציה f כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f''(x) > 0$.
 א. נניח בנוסף כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x) = \infty$. הוכיחו כי ל f יש נק' מינימום גלובלית.

כיוון שהנגזרת השנייה חיובית, הנגזרת הראשונה עולה.

כיוון שהגבולות הם אינסוף מימין ומשמאל, מצפים שהנגזרת תהיה שלילית ואז חיובית.

ניקח נקודה כלשהי למשל $x = 0$.

קיים $x < 0$ בו $f(x) > f(0)$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$) שיפוע המיתר בין שתי הנקודות הללו על גרף הפונקציה הוא

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} < 0$$

באופן דומה, קיימת נקודה $x > 0$ בה $f(x) > f(0)$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), ושיפוע המיתר הוא

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} > 0$$

לפי לגראנז' קיימות נקודות בהן הנגזרת שלילית וחיובית

סה"כ הנגזרת עולה, מתישהו היא שלילית, לאחר מכן היא חיובית ולכן לפי ערך הביניים היא מתאפסת בנקודה כלשהי c .

בתחום $(-\infty, c]$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת.

בתחום $[c, \infty)$ הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה.

סה"כ $f(c)$ הוא הערך הנמוך ביותר של הפונקציה, כלומר $x = c$ היא נקודת מינימום גלובלית.

ב. הוכיחו/הפריכו: ל f יש נק' מינימום גלובלית, גם בלי הנתון הנוסף בסעיף א'.

הפרכה: $f(x) = e^x$ מקיימת כי $f'' > 0$ אך אין לה נקודת מינימום גלובלית, כיוון שהיא תמיד עולה ממש, לכל נקודה יש נקודה נמוכה ממנה, משמאל.

תוספת:

נוכיח שאם f רציפה בכל \mathbb{R} וכמו כן $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ אזי לפונקציה יש מינימום גלובלי.
 נציב נקודה כלשהי, למשל $x = 0$ ונסמן את הגובה בה $f(0) = y_0$
 קיים $M_1 > 0$ כך שלכל $x > M_1$ מתקיים כי $f(x) > y_0$
 קיים $M_2 > 0$ כך שלכל $x < -M_2$ מתקיים כי $f(x) > y_0$
 בקטע $[-M_2, M_1]$ הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן לפי ויירשטראס מקבלת מינימום בנקודה כלשהי x_1
 כיוון ש $-M_2 < 0 < M_1$ וכיוון ש $f(0) = y_0$ אזי $f(x_1) \leq y_0$
 למעשה, x_1 היא מינימום גלובלי, הרי לכל $x \in [-M_2, M_1]$ מתקיים כי $f(x) \geq f(x_1)$
 ומחוץ לקטע $f(x) > y_0 \geq f(x_1)$.

5. תהי סדרה a_n המקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n^2$, ונתון כי $a_1 > a_2$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית יורדת.

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -a_n^2 \leq 0$$
 לכן הסדרה יורדת החל מ $a_2 < a_3$ והלאה
 אבל גם בזוג הראשון יש ירידה לפי הנתון.

ב. נניח כי $a_2 = 0$ חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

אם הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי כיוון שהיא יורדת, נסמנו $a_n \rightarrow L$
 נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+2} = \lim a_{n+1} - a_n^2$$

ולכן

$$L = L - L^2$$

ולכן

$$L = 0$$

נתון כי $a_2 = 0$ וכן $a_1 > a_2 = 0$

$$a_3 = a_2 - a_1^2 = -a_1^2 < 0$$

כיוון שהסדרה יורדת, $L \leq a_3 < 0$ בסתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה, וכיוון שהיא יורדת אזי $a_n \rightarrow -\infty$.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$.

ב. תהי f גזירה שלוש פעמים בסביבה של 0 , המקיימת $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ וכמו כן

$f'''(x) > 0$ בסביבה של 0 . הוכיחו של f אין מינימום מקומי ב $x = 0$.