תורת הקבוצות־ בוחן תשעט

עליכם לענות על כל השאלות.
בהצלחה!

.1

(א) (20 נקודות) תהי A קבוצה של סודרים. הוכיחו ש$\beta = \sup\{\alpha+1|\alpha \in A\}$ הינו הסודר הראשון שגדול ממש מכל איברי A.
הוכחה:
נסמן $\beta = \sup_{\alpha\in A}\{\alpha+1\}$. ראשית, נוכיח ש$\beta$ גדול ממש מכל איברי A. ובכן, יהי $\alpha \in A$. אזי $\alpha < \alpha+1 \leq \beta$ (מהגדרת הסופרימום). שנית, יהי $\gamma < \beta$. אנחנו רוצים להוכיח שγ לא גדול ממש מכל איברי A. ובכן, מהגדרת הסופרימום, מכיוון שγ קטן מהסופרימום, יש $\alpha \in A$ כך ש $\gamma < \alpha+1$. לכן מתכונות העוקב $\alpha \leq \gamma$. מש"ל.

(ב) (20 נקודות) הוכיחו שA קופינלית בβ.
הוכחה:
יהי $\gamma < \beta$. מכיוון שβ הוא הסודר הראשון שגדול מכל איברי A, זה אומר שγ אינו גדול ממש מכל איברי A. כלומר, יש $\alpha \in A$ כך ש $\gamma \leq \alpha$. וזה בדיוק אומר שA קופינלית בβ.

2. (20 נקודות) יהי α סודר. הוכיחו: α טבעי אמ"ם $s(\alpha)$ טבעי.
פתרון:
$\Longleftarrow$ נניח שα טבעי. מהגדרה, $s(\alpha)$ הוא עוקב. כעת, אם $\beta < s(\alpha)$ אז $\beta \leq \alpha$ ולכן β הוא או 0 או עוקב.
$\Longrightarrow$ יהי $\beta \leq \alpha$. אזי $\beta < s(\alpha)$ ולכן β הוא או 0 או עוקב. מכאן שα סודר טבעי.

.3

(א) (20 נקודות) הוכיחו שלכל $\alpha \neq 0$, $2\cdot(\omega^\alpha) = \omega^\alpha$.
הוכחה:
נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית.
עבור $\alpha = 1$: הוכחתם בש"ב $2\cdot\omega = \omega$.
נניח ש$\alpha = \beta+1$ והטענה נכונה לβ. $2\cdot\omega^\alpha = 2\cdot\omega^{\beta+1} = 2(\omega^\beta\cdot\omega) = (2\cdot\omega^\beta)\omega = \omega^\beta\omega = \omega^{\beta+1} = \omega^\alpha$.
כעת נניח שα גבולי והטענה נכונה לכל $\beta < \alpha$. $2\omega^\alpha = 2\sup\omega^\beta = \sup 2\omega^\beta = \sup\omega^\beta = \omega^\alpha$.

(ב) (20 נקודות) הסיקו שלכל סודר גבולי β מתקיים: $\beta = 2 \cdot \beta$. (רמז: הצגה בבסיס ω)

פתרון:

יהי β סודר גבולי. ידוע שכל סודר ניתן להצגה יחידה כצירוף של חזקות של ω. כלומר, $\beta = \omega^{\beta_n}\alpha_n + ... + \omega^{\beta_0}\alpha_0$ כאשר $0 \neq \alpha_i < \omega$ ו$\beta_0 < ... < \beta_n$. מכיוון β גבולי, $\beta_0 \neq 0$. נניח בשלילה ש$\beta_0 = 0$, אזי $\alpha_0 = n$ עבור מס' טבעי שונה מ0 כלשהו. כלומר, $\beta = \gamma + n$ לאיזשהו γ. בסתירה לכך שβ גבולי. אם $\beta_0 \neq 0$אז כל $\beta_n \neq 0$. ולכן ניתן להשתמש בסעיף הקודם:

$\omega^{\beta_n}\alpha_n + ... + \omega^{\beta_0}\alpha_0) = 2(\omega^{\beta_n}\alpha_n) + ... + 2(\omega^{\beta_0}\alpha_0) = (2\omega^{\beta_n})\alpha_n + ... +$
$2\beta = 2((2\omega^{\beta_0})\alpha_0 = \omega^{\beta_n}\alpha_n + ... + \omega^{\beta_0}\alpha_0 = \beta$.

4. (10 נקודות) בונוס: יהי α סודר גבולי. הוכיחו שביחס לטופולוגיית הסדר, α אינו מרחב קומפקטי.

הוכחה:

לכל $\beta < \alpha$ נגדיר את הקרן $(-\infty, \beta)$. זה בעצם הקבוצה β. ידוע שאם α גבולי אז $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}\beta$. נניח בשלילה שיש תת קבוצה סופית $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ כך ש$\alpha = \beta_1 \cup ... \cup \beta_n$. בה"כ β_n הוא המקסימלי מבינהם, ולכן בעצם $\alpha = \beta_n$ אבל $\beta_n < \alpha$. סתירה.