חקב"צ - הרצאה 4

24 בנובמבר 2011

מקרים חריגים בסימפלקס

מקרה 1

איטרציה	משתנה בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	אגף ימין	יחס
0	z	1	-3	-5	0	0	0	0	
	x_3	0	1	0	1	0	0	4	∞
	x_4	0	0	2	0	1	0	12	6
	x_5	0	3	2	0	0	1	12	6
1	z	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
	x_3	0	1	0	1	0	0	4	4
	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	∞
	x_5	0	3	0	0	-1	1	0	0
2	z	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	30	
	x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	4	
	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
	x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	

נשים לב שבמקרה הזה באיטרציה 1 ובאיטרציה 2 z לא משתפר, וזה כי יוצא לנו ש$x_1 = 0$, אחד ממשתני הבסיס הוא 0. במקרה זה, יש 2 פתרונות שנותנים $z = 30$.

מקרה 2

איטרציה	משתנה בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	אגף ימין	יחס
0	z	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	-
	x_5	0	1	1	0	0	1	0	2	2
	x_6	0	0	0	1	1	0	1	5	∞
1	z	1	0	0	-1	-1	1	0	2	
	x_1	0	1	1	0	0	1	0	2	
	x_6	0	0	0	1	1	0	1	5	5
2	z	1	0	0	0	0	1	1	7	
	x_1	0	1	1	0	0	1	0	2	
	x_3	0	0	0	1	1	0	1	5	
3	z	1	0	0	0	0	1	1	7	
	x_2	0	1	1	0	0	1	0	2	
	x_3	0	0	0	1	1	0	1	5	
4	z	1	0	0	0	0	1	1	7	
	x_2	0	1	1	0	0	1	0	2	
	x_4	0	0	0	1	1	0	1	5	
5	z	1	0	0	0	0	1	1	7	
	x_1	0	1	1	0	0	1	0	2	
	x_4	0	0	0	1	1	0	1	5	

את איטרציות 3 4 ו5 לא היינו עושים בסימפלקס, אבל במקרה הזה נשים לב שהמטריצה לא משתנה, והz לא ירד, כלומר יש לנו כמה פתרונות אפשריים ובסימפלקס היינו מוצאים רק 1.

זה קורה מכיוון שבאיטרציה 2 המקדם של x_2 ו-x_4 בפונק' המטרה (השורה הראשונה) הוא 0, והם משתנים לא בסיסיים.

מקרה 3

איטרציה	משתנה בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	אגף ימין	יחס
0	z	1	-6	-2	-10	-8	0	0	0	0	
	x_5	0	3	-3	2	8	1	0	0	25	12.5
	x_6	0	5	6	-4	-4	0	1	0	20	-
	x_7	0	4	-2	1	3	0	0	1	10	10
1	z	1	34	-22	0	22	0	0	10	100	
	x_5	0	-5	1	0	2	1	0	-2	5	5
	x_6	0	21	-2	0	8	0	1	4	60	-
	x_3	0	4	-2	1	3	0	0	1	10	-
2	z	1	-76	0	0	66	22	0	-34	210	
	x_2	0	-5	1	0	2	1	0	-2	5	-
	x_6	0	11	0	0	12	2	1	0	70	$\frac{70}{11}$
	x_3	0	-6	0	1	7	2	0	-3	20	-
3	z	1	0	0	0	$\frac{1638}{11}$	$\frac{394}{11}$	$\frac{76}{11}$	-34	$\frac{7630}{11}$	
	x_2	0	0	1	0	$\frac{82}{11}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{5}{11}$	-2	$\frac{405}{11}$	-
	x_1	0	1	0	0	$\frac{12}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	0	$\frac{70}{11}$	-
	x_3	0	0	0	1	$\frac{149}{11}$	$\frac{34}{11}$	$\frac{6}{11}$	-3	$\frac{640}{11}$	-

במקרה הזה, קיבלנו שיש מקדם שלילי ב-z אך אי אפשר לעשות עוד איטרציה כי כל היחסים שליליים או אינסוף.

התאמה לסימפלקס

מקרה 1

נניח שבבעיה כלשהי מגדירים לנו ש-$x_1 \geq 0$ ו-$x_2 \leq 0$.
היות והסימפלקס משמש רק למשתנים אי שליליים, כדי לפתור בעיה זו נגדיר משתנה חדש $x_2^{'} = -x_2 \geq 0$. נציב אותו בבעיה:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 - 5x_2^{'} \\ \text{s.t} &: x_1 \leq 4 \\ & -x_2^{'} \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2^{'} \leq 18 \\ & x_1, x_2^{'} \geq 0 \end{aligned}$$

כשנקבל את הפתרון נציב בחזרה $x_2 = -x_2^{'}$.

מקרה 2

נניח כי $x_1 \geq 0$ ו-x_2 לא מאולץ, כלומר יכול להיות חיובי ויכול להיות שלילי.
עבור הסימפלקס זה לא טוב ולכן במקרה זה ניתן להציג את המשתנה ע"י הפרש של 2 מס' חיוביים כאשר x_2 אינו מאולץ. נציג באופן הבא:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^{'} - x_2^{''} \\ x_2^{'} &\geq 0 \\ x_2^{''} &\geq 0 \end{aligned}$$

נציב בבעיה ונקבל:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 5x_2^{'} - 5x_2^{''} \\ \text{s.t} &: x_1 \leq 4 \\ & x_2^{'} - x_2^{''} \leq 6 \end{aligned}$$

$$3x_1 + 2x_2^{'} - 2x_2^{''} \leq 18$$
$$x_1,\, x_2^{'},\, x_2^{''} \geq 0$$

בטבלאות הסימפלקס שנבנה העמודות של $x_2^{'}$ ו$x_2^{''}$ יהיו זהות פרט לסימן.
כמו כן, לעולם לא יהיה מצב בו גם $x_2^{'}$ וגם $x_2^{''}$ יהיו בבסיס, אלא רק אחד מהם או אף אחד מהם וזאת מכיוון שהם תלויים לינארית.
נניח שבפתרון של הבעיה קיבלנו $x_2^{''} = 6$ ו$x_2^{'} = 0$ אז $x_2 = -6$.
$x_2^{'}$ ו$x_2^{''}$ לא יכולים להיות שניהם חיוביים ממש היות ורק אחד מהם בבסיס, כלומר לפחות אחד מהם יהיה שווה ל0.

מקרה 3

נניח כעת שהבעיה שלפנינו היא:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t} &: x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

האילוץ השלישי מגדיר שהפתרונות האפשריים יהיו רק על הישר $3x_1 + 2x_2 = 18$.
הסימפלקס מגדיר שכדי למצוא נק' קיצון עלינו להפוך את אי השוויון לשוויון.
הבסיס מורכב ממס' המשתנים כמס' האילוצים.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 18 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

נניח שניקח $x_1 = 0$. נקבל:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 \\ x_2 &= 9 \\ x_4 &= -3 \end{aligned}$$

בעייתי! נוסיף משתנה לאילוץ השוויון:

$$3x_1 + 2x_2 + \bar{x_5} = 18$$

$\bar{x_5}$ הוא משתנה מלאכותי שערכו חייב להיות 0. נאפשר לו להיות $\bar{x_5} \geq 0$.
אם $\bar{x_5} > 0$ אז הפתרון שיש לנו אינו אפשרי לבעיה. הוספנו אותו כדי שיהיה לנו קל להתחיל.
אם ניקח $x_1 = x_2 = 0$ הפתרון המיידי שנקבל יהיה:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 \\ x_4 &= 6 \\ \bar{x_5} &= 18 \end{aligned}$$

אנו יודעים ש$(0, 0)$ אינה נק' אפשרית לפתרון אבל ניעזר בה כדי שנוכל להתחיל לפתור.
כל זמן שx_5 חיובי אנחנו לא בתחום הפתרון האפשרי ולכן נחסיר מפונק' המטרה את x_5 ונכפיל אותו בM כאשר M הוא מס' מאוד גדול:

$$\max\ z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x_5}$$

שיטה זו נקראת שיטת הM הגדול.
כעת אנו פותרים את הבעיה:

$$z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x_5} = 0$$

אך בהתחלה x_5 משתנה בסיסי ולכן נאפס את המקדם שלו בפונק' המטרה. נכפיל את האילוץ השלישי ב$-M$ ונוסיף אותו לפונק' המטרה:

$$z + x_1\left(-3-3M\right) + x_2\left(-5-2M\right) = -18M$$

קיבלנו את המשוואה של z ללא משתנים בסיסיים והערך של z מאוד שלילי.
המערכת:

$$\begin{aligned} z + \left(-3-3M\right)x_1 + \left(-5-2M\right)x_2 &= -18M \\ x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + \bar{x_5} &= 18 \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, \bar{x_5} &\geq 0 \end{aligned}$$