תורת המשחקים – שיעור 6

משחקי סכום אפס, אסטרטגיות מעורבות

תזכורת: דוגמה למשחק סכום אפס

- מצאו אסטרטגית מקסמין ואסטרטגית מינמקס עבור המשחק:

	A	B	C	D	MIN
T	8	4	8	4	4
M	2	5	3	8	2
B	6	1	4	5	1
MAX	8	5	8	8	$\underline{v} = 4$ $\overline{v} = 5$

סיכון המשחק מהדוגמה

- אנחנו רואים:
  - שחקן 1 יכול להבטיח לעצמו לפחות 4 (מקסמין).
  - שחקן 2 יכול להבטיח ששחקן 1 יקבל לכל היותר 5 (מינמקס).
- כיוון שמתקיים $\underline{v} = 4 < 5 = \bar{v}$ אנו אומרים שלמשחק ***אין ערך***.
- הכוונה בכך שאין ערך למשחק אינה שלמשחק אין משמעות (או שאינו "טוב"), אלא שלמשחק בעל ערך יש מספר (***הערך***) שיש לו חשיבות מתימטית.
- למשחק ללא ערך יש גם "בעית יציבות": לדוגמה במשחק הנ"ל שחקן 1 ייבחר באסטרטגיה T ושחקן 2 ייבחר באסטרטגיה B, ונקבל תשלום של 4. אך במקרה ששחקן 2 בוחר ב B שחקן 1 היה למעשה מעדיף לבחור דווקא ב M, ואז שחקן 2 היה משנה את דעתו בהתאם...

משחק עם ערך

- אם מתקיים $\underline{v} = \bar{v}$ נאמר ש- ***למשחק יש ערך*** ו- $v = \bar{v}$ $= \underline{v}$ נקרא ה- ***ערך של המשחק***.

- במשחק בעל ערך, וקטור אסטרטגיות (s_1, s_2) המוביל לערך המשחק (כלומר s_1 הוא מקסמין, ו- s_2 הוא מינמקס) נקרא ***וקטור אסטרטגיות אופטימליות***.

במשחק בעל ערך יש נק' שיווי משקל

- **<u>משפט 1:</u>** במשחק סכום אפס בעל ערך, וקטור אסטרטגיות אופטימליות הוא נקודת שיווי משקל נאש.
- **<u>הוכחה:</u>** יהי $s = (s_1, s_2)$ וקטור אסטרטגיות אופטימליות.
- כיוון ש s_1 היא אסטרטגית מקסמין, הרי שכל בחירת אסטרטגיה $t_2 \in S_2$ תביא לתשלום של לפחות v. כלומר

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, t_2) \geq v = u(s_1, s_2)$$

- בצורה דומה

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(t_1, s_2) \leq v = u(s_1, s_2)$$

- לכן לאף שחקן אין אינטרס לזוז מהוקטור s, כלומר הוא שיווי משקל נאש.
- מש"ל

ולהיפך: משחק עם שיווי משקל הוא בעל ערך

- **משפט 2:** משחק סכום אפס בעל נק' שיווי משקל הוא משחק בעל ערך.
- **הוכחה:** נסמן ב $s=(s_1,s_2)$ את נק' שיווי המשקל.
- נסמן $v=u(s_1,s_2)$.
- לפי הגדרת שיווי משקל

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1,\mathrm{t}_2) \geq u(s_1,\mathrm{s}_2) = v$$

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(\mathrm{t}_1,\mathrm{s}_2) \leq u(s_1,\mathrm{s}_2) = v$$

- אם כך $v \leq \underline{v}$ וגם $v \geq \overline{v}$.
- אבל ציינו כבר שמתקיים תמיד $\overline{v} \leq \underline{v}$ -- לכן $\bar{v}=\underline{v}$.
- מש"ל.

נקודות אוכף

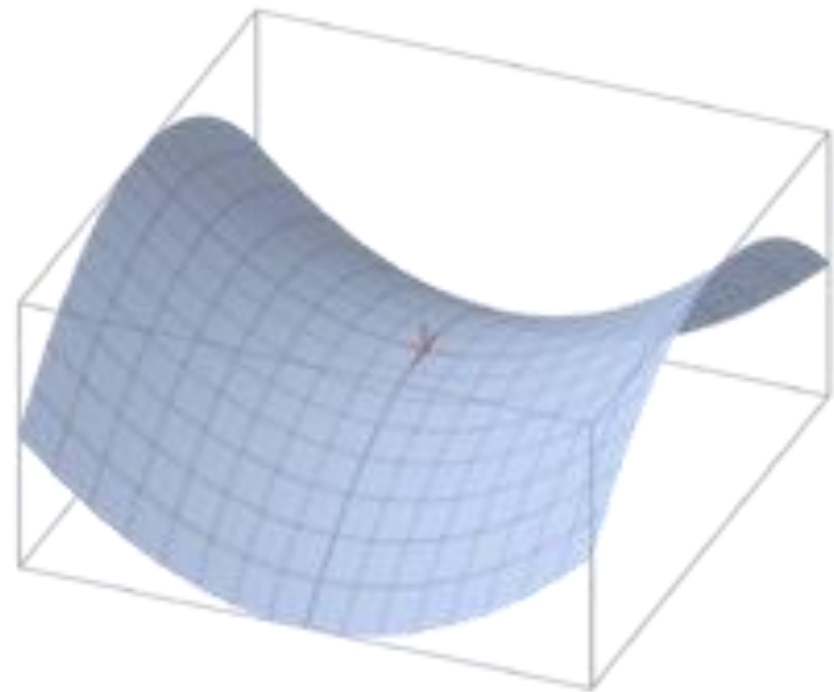
- הערה: נשים לב שוקטור אסטרטגיות אופטימליות במשחק סכום אפס בעל ערך מייצג ***נקודת אוכף*** של פונקצית התועלת u כפונקציה של שני משתנים.

$$\forall t_2 \in S_2, \quad u(s_1, \mathrm{t}_2) \geq u(s_1, \mathrm{s}_2)$$

$$\forall t_1 \in S_1, \quad u(\mathrm{t}_1, \mathrm{s}_2) \leq u(s_1, \mathrm{s}_2)$$

כלומר במשחק סכום אפס:

<u>משפט:</u> וקטור $s = (s_1, s_2)$ הוא נק' אוכף אם ורק אם המשחק הוא בעל ערך ו- s הוא וקטור אסטרטגיות אופטימליות.



דוגמה: משחק סכום אפס רציף

- קבוצת האסטרטגיות של שני השחקנים היא $S_i = [0,1]$.
- פונקצית התועלת של המשחק היא

$$u(x,y) = 4xy - 2x - y + 3$$

- נחשב תחילה את ערך המקסמין $\underline{v}$:

$$\underline{v} = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} u(x,y)$$

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y) = \min_{y\in[0,1]}\left((4x-1)y - 2x + 3\right)$$

$$= \min_{y\in[0,1]}\left(my + b\right)$$

- לכל בחירה של x נקבל פונקציה לינארית ב y, והמינימום נקבע ע"י נקודות השפה בהתאם לשיפוע.

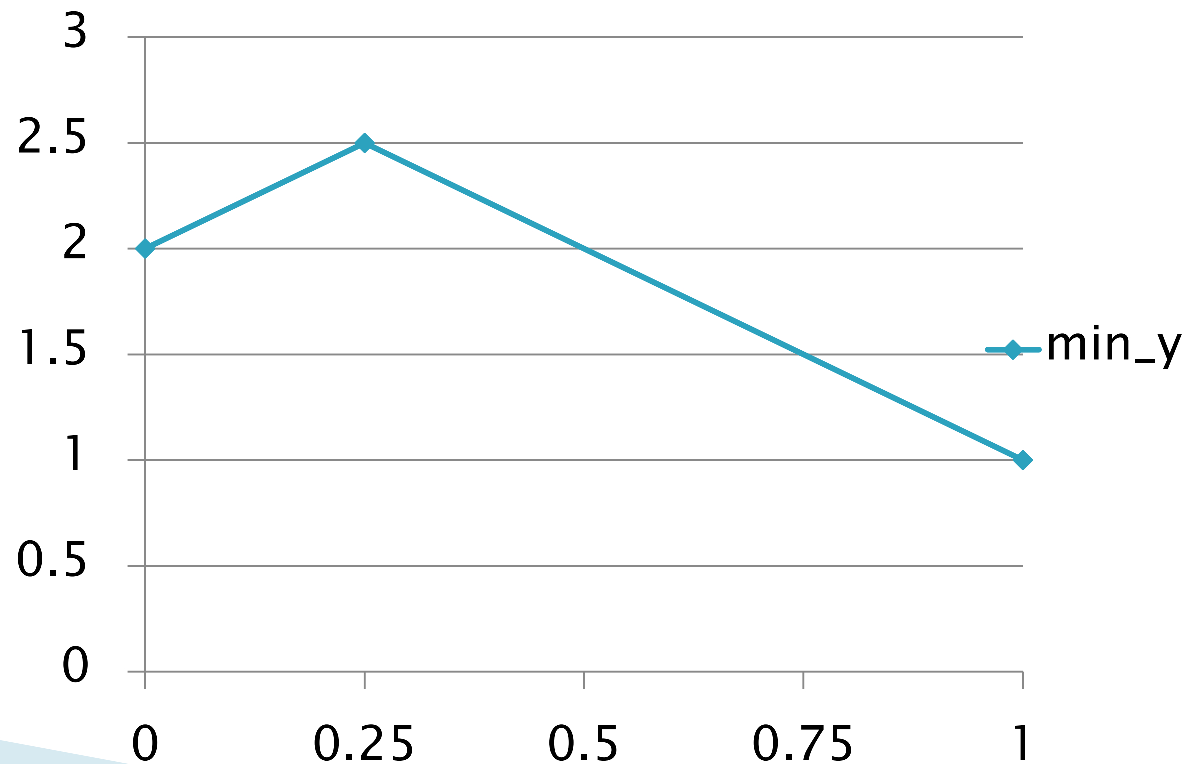
המשך

- השיפוע הוא $4x-1$ ולכן הוא שלילי כאשר $x \in [0,\frac{1}{4})$, וחיובי כאשר $x \in (\frac{1}{4},1]$
- המינימום עבור $x \in \left[0,\frac{1}{4}\right)$ מתקבל כאשר $y=1$ וערכו הוא $u(x,1)=4x-1-2x+3=2x+2$
- המינימום עבור $x \in (\frac{1}{4},1]$ מתקבל כאשר כאשר $y=0$ וערכו הוא $u(x,0)=-2x+3$
- כאשר $x=\frac{1}{4}$ נקבל $u\left(\frac{1}{4},y\right)=y-\frac{2}{4}-y+3=2.5$.

המשך

- סה"כ נקבל

$$\min_{y\in[0,1]} u(x,y)=\begin{cases}2x+2 & x\le \frac{1}{4}\\ -2x+3 & x>\frac{1}{4}\end{cases}$$



המשך

- לכן:

$$\underline{v} = \max_{x\in[0,1]} \min_{y\in[0,1]} u(x,\mathrm{y}) = 2.5$$

ומתקיים ש- $x = \frac{1}{4}$ היא אסטרטגית המקסמין של שחקן 1.

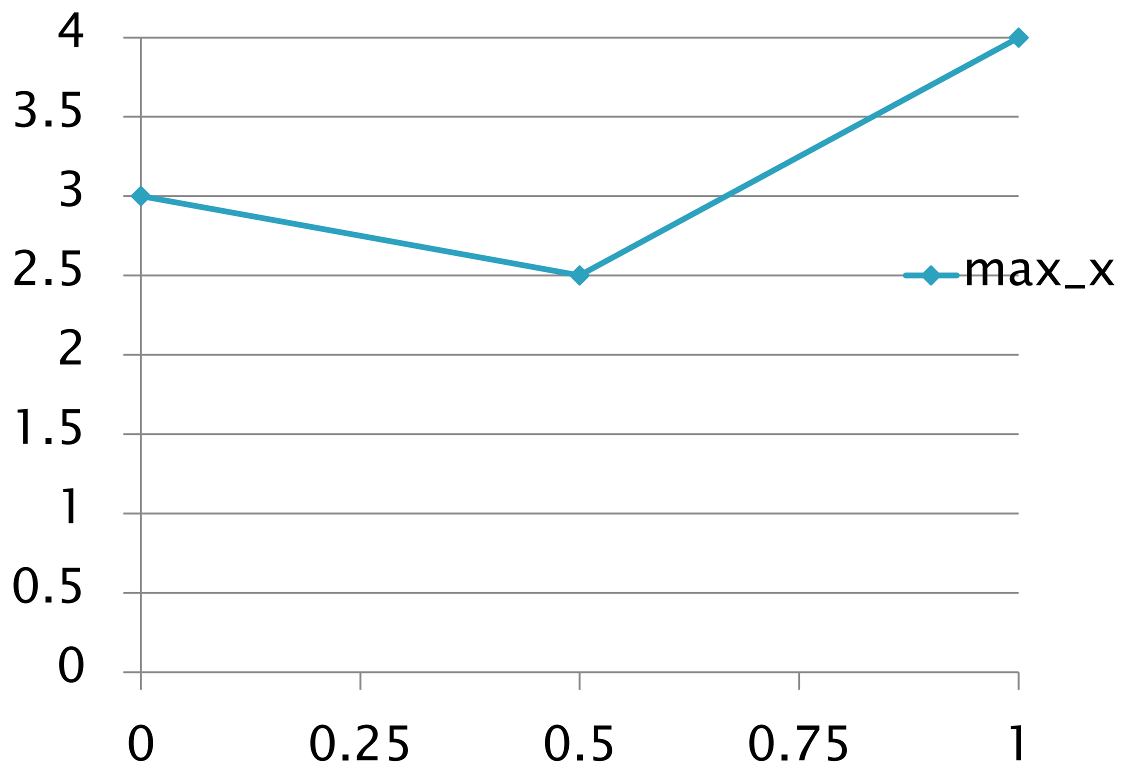
- כעת צריך לחשב את

$$\bar{v} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} u(x,\mathrm{y})$$

- באופן דומה מקבלים:

$$\max_{x\in[0,1]} u(x,y) = \begin{cases} -y+3 & y \le \frac{1}{2} \\ 3y+1 & y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

המשך



- נקבל $\bar{v} = \min_{y\in[0,1]} \max_{x\in[0,1]} u(x,y) = 2.5$

ואסטרטגית המינמקס של שחקן 2 היא $y = \frac{1}{2}$.

המשך - סיכום

- קיבלנו שלמשחק יש ערך והוא 2.5.
- וקטור האסטרטגיות האופטימליות הוא $s = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
- יש שיווי משקל נאש היחיד במשחק והוא: $s = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- מה קורה אם אחד השחקנים מחליט שבמקום לבחור בעצמו אסטרטגיה הוא יטיל מטבע, ונפילת המטבע תקבע את בחירתו?
- ניתן להסתכל על הטלת מטבע זו כבחירת אסטרטגיה (שונה מהאסטרטגיות הנתונות).

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- נזכר במטריצת המשחק:

		שחקן 2		
		H	T	MIN
שחקן 1	H	1	-1	-1
	T	-1	1	-1
	MAX	1	1	$\underline{v}=-1$ $\overline{v}=1$

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- ניתן לכתוב אסטרטגיה מעורבת כך: $\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right]$ -- יש הסתברות $\frac{1}{2}$ לבחירת עץ והסתברות $\frac{1}{2}$ לקבלת פלי.
- לדוגמה שחקן 1 כעת בעל אסטרטגיות $\left\{H,T,\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right]\right\}$, ושחקן 2 נשאר עם אסטרטגיות $\{H,T\}$.
- אבל איך מגדירים את התשלום $u\left(\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right],H\right)=???$.
- אנחנו לא יודעים מראש מה תהיה תוצאת המשחק, ולכן לא ניתן לקבוע מה יהיה התשלום.

אסטרטגיות מעורבות - הקדמה

- פתרון אפשרי לבעיה זו היא בחירת ***התוחלת*** של התשלומים כתשלום לאסטרטגיה "המעורבת" $\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right]$:

$$u\left(\left[\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T\right],H\right)=\frac{1}{2}u(H,H)+\frac{1}{2}u(\mathrm{T},H)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

- לבחירה זאת יש תכונות נוחות מאד, נשים לב שפונקצית התשלום פועלת באופן ליניארי על האסטרטגיה המעורבת.

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- נוסיף את האסטרטגיות המעורבות:

שחקן 2

שחקן 1

	H	$\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T$	T	MIN
H	1	0	-1	-1
$\frac{1}{2}H,\frac{1}{2}T$	0	0	0	0
T	-1	0	1	-1
MAX	1	0	1	$\underline{v}=0$ $\overline{v}=0$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- ראינו שהוספת אסטרטגיה מעורבת $\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}T\right]$ למעשה פתרה את המשחק.
- כעת יש לנו ערך למשחק וגם שיווי משקל נאש יחיד.
- אם שני השחקנים יתאמו ששניהם יטילו מטבעות, אזי לאף אחד מהם לא יהיה מניע לשנות את האסטרטגיה שלו.
- דוגמה זו ממחישה באופן טוב מאד מדוע כדאי לשקול הוספת אסטרטגיות מעורבות למשחקים.
- אבל מדוע להסתפק בהוספת אסטרטגיה אחת? ניתן להוסיף רצף של אסטרטגיות מעורבות מהצורה $[pH,(1-p)T]$.
- לדוגמה: $H=[1H,0T], T=[0H,1T]$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- הפכנו את המשחק הסופי למשחק סכום אפס רציף, עם פונקצית התועלת הבאה:

$$u\left(\left[pH,(1-p)T\right],\left[qH,(1-q)T\right]\right)=$$

$$=pu(H,\left[qH,(1-q)T\right])+(1-p)u(T,\left[qH,(1-q)T\right])=$$

$$=pqu(H,H)+p(1-q)u(H,T)+$$
$$+(1-p)qu(T,H)+(1-p)(1-q)u(T,T)=$$

$$=pq-p(1-q)-(1-p)q+(1-p)(1-q)=$$

$$=4pq-2p-2q+1$$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- למעשה בחירת אסטרטגיה שקולה לבחירת מספר בקטע $[0,1]$.
- לכן ניתן לכתוב בקיצור $u(p,q) = 4pq - 2p - 2q + 1$.
- כעת נמצא את ערכי המקסמין והמינמקס של המשחק.

$$\min_{q\in[0,1]} u(p,q) = \min_{q\in[0,1]}\left((4p-2)q-2p+1\right)$$

$$= \min_{q\in[0,1]}\left(mq+b\right)$$

- השיפוע של $u(p,q)$ כפונקציה של q הוא $4p-2$ -- לכן השיפוע מחליף סימן ב $p=\frac{1}{2}$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

$$\min_{q\in[0,1]} u(p,q) = \begin{cases} u(\mathrm{p},1) & p \le \frac{1}{2} \\ u(\mathrm{p},0) & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2p-1 & p \le \frac{1}{2} \\ 1-2p & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ערך המקסמין מתקבל באסטרטגיה $p = \frac{1}{2}$ של שחקן 1

$$\underline{v} = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} u(p,q) = 0$$

משחק זוג או פרט עם אסטרטגיות מעורבות

- בצורה דומה מראים

$$\overline{v} = \min_{q\in[0,1]} \max_{p\in[0,1]} u(p,q) = 0$$

- ערך המקסמין מתקבל באסטרטגיה $q = \frac{1}{2}$ של שחקן 2.
- אם כך יש למשחק ערך והוא $v = 0$ והוא מתקבל באסטרטגיה $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- אסטרטגיה זו היא שיווי משקל נאש (היחיד במשחק).
- תרגיל בית: מצאו את שיווי משקל נאש בעזרת פונקציות BR כפי שעשינו בשיעור 4.

הוספת אסטרטגיות מעורבות

- יהי G משחק בו לשחקן i יש מספר סופי של אסטרטגיות:

$$S_i = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

- נוסיף לשחקן i אסטרטגיות באופן הבא:
  - נבחר n הסתברויות $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ כך ש

$$p_1 + \ldots + p_n = 1$$

  - נוסיף את האסטרטגיה המעורבת $[p_1 x_1, \ldots, p_n x_n]$.

המשפטים של תורת המשחקים

- **משפט נאש:** יהי G משחק סופי עם מספר סופי של אסטרטגיות, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות (לכל השחקנים), אזי ב G' קיים שיווי משקל נאש.

- **משפט המינימקס (פון-נוימן):** יהי G משחק סכום אפס, ויהי G' המשחק המתקבל לאחר הוספת אסטרטגיות מעורבות, אזי מתקיים

$$\max_{\vec{p}_1} \min_{\vec{p}_2} u(x_1, x_2) = \min_{\vec{p}_2} \max_{\vec{p}_1} u(x_1, x_2)$$

  - כלומר למשחק G' יש ערך.
- משפט המינימקס הוא מסקנה של משפט נאש, מדוע?

ניתוח משחק

- מילטון פרידמן – zero sum political game
- http://www.youtube.com/watch?v=OoSzrgMNx8s
- האם המשחקים שמילטון פרידמן מציג הם אכן משחקי סכום אפס?