חזרה

הגדרה

יהי X מרחב וקטורי מעל K‏(=$\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). נורמה על X היא פונקציה $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ כאשר:

I. $\|x\| \geq 0$ עם שוויון $\iff x = 0$.

II. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ לכל $\alpha \in K$.

III. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

הזוג $(x, \|\cdot\|)$ נקרא "מרחב נורמי"(מעל K). ברגע שיש נורמה יש מטריקה $d(x,y) = \|x-y\|$.

הגדרה

יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. אומרים שהוא שלם אם כל סדרת קושי מX מתכנסת לאיבר בX.

מרחב נורמי שלם נקרא מרחב בנך.

דוגמאות

1. $\mathbb{R}^n$ ו$\mathbb{C}^n$ עם הנורמה האוקלידית, וגם עם עוד נורמה $\|(x_1,\dots x_n)\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

2. $C(K)$=פונקציות רציפות $f : K \to \mathbb{R},\mathbb{C}$. $\|f\| = \max_{x\in K} |f(x)|$ ‏(K קומפקטי).
הוכחנו שזה מרחב בנך.

---

3. מרחבי $\mathscr{L}^P$.

יהי (X,S,μ) ממ"ח. עבור $1 \leq p \leq \infty$ מגירים $\mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$ להיות אוסף כל הפונקציות המדידות $f : X \to \mathbb{R}^*$(או $f : X \to \mathbb{C}^*$) כך ש$\infty > \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \|f\|_p$.

הערה: עבור $f : X \to \mathbb{C}^*$ נאמר שf מדידה־S אם $f = u + iv$, u וv מדידות S ו$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X u\,\mathrm{d}\mu + i\int_X v\,\mathrm{d}\mu$.

נעיר שאם $f(x) \equiv 0$ כב"מ $\mathrm{d}\mu$ אזי $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = 0$, אף על פי ש$f \neq 0$ ־ בסתירה לדרישה I לנורמה. הפתרון לבעיה זו הוא לומר ששתי פונקציות $f,g \in \mathscr{L}^p$ שקולות אם $f(x) = g(x)$ כב"מ. ז.א. "פונקציות" ב$\mathscr{L}^p$ הן באמת מחלקות שקילות של פונקציות.

נבדוק שאמנם $\mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$ מרחב וקטורי מעל K. ובכן, אם $f,g \in \mathscr{L}^p$ צ"ל ש$f+g \in \mathscr{L}^p$, ז.א. $\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$. ובכן: לכל $x \in X$

$$|f(x) + g(x)| \leq 2\max(|f(x)|, |g(x)|)$$

לכן

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \left[\max(|f(x)|^p, |g(x)|^p)\right]$$

הדבר נכון לכל $x \in X$, ולכן

$$\int_X |f+g|^p \le 2^p \int_X \left(|f|^p + |g|^p\right) \mathrm{d}\mu < \infty$$

כי נתון ש-$f, g \in \mathscr{L}^p$. נותר להוכיח שאם $\alpha \in K$ ו-$f \in \mathscr{L}^p$ אז $\alpha f \in \mathscr{L}^p$. אבל

$$\int_X |\alpha f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |\alpha|^p |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

לכן $\alpha f \in \mathscr{L}^p$. יתר על כן

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} = |\alpha| \, \|f\|$$

והוכחנו תכונה II של נורמה. תכונה III של נורמה לא טריביאלית ב-$\mathscr{L}^p$, ונצטרך הכנות לזה.

למה: יהיו $a, b \ge 0$, ויהי $0 < \lambda < 1$. אזי $a^\lambda b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda) b$ עם שוויון רק עבור $a = b$

(הערה: עבור $\lambda = 1/2$ הלמה אומרת $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ וזה דבר ידוע)

הוכחה: אם $b = 0$ הלמה טריוויאלית, ואם לאו אפשר לחלק ב-b לקבל טענה שקולה. ז.א. שקול:

$$a^\lambda b^{-\lambda} \le \frac{a}{b}\lambda + (1-\lambda)$$

נציב $t = \frac{a}{b}$ והטענה היא לכל $t \ge 0$

$$t^\lambda \le t\lambda + (1-\lambda)$$

כדי להוכיח אי שוויון זה נגדיר $\varphi(t) = t\lambda + (1-\lambda) - t\lambda$. צ"ל: לכל $t \ge 0$, $\varphi(t) \ge 0$. אבל

$$\varphi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-1} = \lambda\left(1 - t^{\lambda-1}\right)$$

לכן

$$t = 1 \iff \varphi'(t) = 0$$

וכיוון ש-$0 < \lambda < 1$ אם $0 < t < 1$, $\varphi'(t) < 0$ ועבור $t > 1$, $\varphi'(t) > 0$. יתר על כן,

$$\varphi(0) = 1 - \lambda > 0 \qquad \varphi(1) = 0$$

וממילא הגרף של $\varphi(t)$ אינו שלילי כאשר t חיובי והוכחנו ש-$\varphi(t) \ge 0$ לכל $t \ge 0$.

■

משפט 1(אי שוויון הולדר)

נניח ש$1 < p < \infty$. נגדיר q ע"י $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ז.א. $pq = p + q$ או $q = \frac{p}{p-1}$ וגם $1 < q < \infty$.

כעת אם $f \in \mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$ ו$g \in \mathscr{L}^q(\mathrm{d}\mu)$ אז $fg \in \mathscr{L}^1(\mathrm{d}\mu)$ ומתקיים

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

יש שוויון $\Longleftrightarrow$ קיימים קבועים $\alpha, \beta \geq 0$ כך ש$\alpha |f(x)|^p = \beta |g(x)|^q$ כב"מ.

הוכחה

כמקרה ראשון נניח ש$\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. נפעיל את הלמה עבור $x \in X$ כלשהו כאשר

$$a = |f(x)|^p \qquad b = |g(x)|^q$$

$$(1-\lambda) = 1/q \qquad \lambda = 1/p$$

לפי הלמה

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

ז.א.

$$|f(x) g(x)| \leq \lambda |f(x)|^p + (1-\lambda) |g(x)|^q$$

לכן

$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \lambda \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu + (1-\lambda) \int |g|^q \, \mathrm{d}\mu = \lambda + (1-\lambda) = 1 = \|f\|_p \|g\|_q$$

מקרה כללי

אם $f \equiv 0$ או $g \equiv 0$ אי שוויון הולדר טריוויאלי, ואם לא אפשר לנרמל. נגדיר:

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p} \qquad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$$

לפי זה

$$\|F\|_p = \left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_p = \frac{1}{\|f\|_p} \|f\|_p = 1$$

כמו כן $\|G\|_q = 1$. לפי המקרה הראשון

$$\int_X |FG| \, \mathrm{d}\mu \leq \|F\|_p \|G\|_q = 1$$

ז.א.

$$\int_X \left| \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} \right| \mathrm{d}\mu \leq 1$$

$$\int_X |fg| \ \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

■

הגדרה

עבור $1 < p,q < \infty$ אומרים ש-p ו-q "חזקות צמודות" אם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

מקרה פרטי $p = q = 2$. במקרה זה אי שוויון הולדר הוא אי שוויון קושי שוורץ.

משפט 2(אי שוויון מינקובסקי = אי שוויון המשולש ב-$\mathscr{L}^p$)

יהיו $f, g \in \mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$. אזי

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

עם שוויון $\iff$ $f(x) = cg(x)$ או $g(x) = cf(x)$ כאשר c קבוע.

הוכחה

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p \ \mathrm{d}\mu \leq \int_X |f+g|^{p-1} \left(|f| + |g|\right) \mathrm{d}\mu =$$

$$= \int_X |f+g|^{p-1} |f| \ \mathrm{d}\mu + \int_X |f+g|^{p-1} |g| \ \mathrm{d}\mu = I_1 + I_2$$

ב-I_1 נשים לב ש-$f \in \mathscr{L}^p$(נתון) וגם $|f+g| \in \mathscr{L}^p$, אבל $(p-1)\,q = p$(q צמוד ל-p) ולכן $|f+g|^{p-1} \in \mathscr{L}^q$. נפעיל את אי־שוויון הולדר ל-I_1, כלומר

$$\int_X |f+g|^{p-1} |f| \ \mathrm{d}\mu \leq \left[\int_X \left(|f+g|^{p-1}\right)^q \mathrm{d}\mu\right]^{1/q} \left(\int_X |f|^p \ \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \|f+g\|_p^{p/q} \|f\|_p$$

כמו כן

$$I_2 \leq \|f+g\|_p^{p/q} \|g\|_p$$

נסכם:

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q} \left(\|f\|_p + \|g\|_q\right)$$

רוצים להעביר $\|f+g\|_p^{p/q}$ לצד שמאל, אז נקבל חזרה $p-p/q=1$, ולכן קיבלנו

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

■

אם נחבר את כל החלקים: הוכחנו שעבור $1<p<\infty$ $\mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$ מרחב נורמי. לגבי $\mathscr{L}^1(\mathrm{d}\mu)$ אי שוויון המשולש טריוויאלי, לכן גם $\mathscr{L}^1(\mathrm{d}\mu)$ מרחב נורמי.

הערה: אפשר להגדיר $\mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$ גם עבור $0<p<1$, אבל אז הביטוי $\left(\int|f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)$ אינו נורמה.

גם מגדירים את $\mathscr{L}^\infty(\mathrm{d}\mu)$ להיות (מחלקות שקילות של) פונקציות וחסומות בעיקר(essentially bounded functions). הנורמה היא

$$\|f\|_\infty \inf\left\{\lambda\ge 0|\mu\left\{x\in X||f(x)>\lambda|\right\}=0\right\}=$$

$$=\sup\left\{\lambda\ge 0|\mu\left\{x\in X||f(x)>\lambda|\right\}>0\right\}=$$

$$=\inf_{g\sim f}\sup\left\{|g(x)||x\in X\right\}$$

כאשר $g\sim f$ אומר $f(x)=g(x)$ כב"מ($\mathrm{d}\mu$).
תרגיל קל להוכיח ש$\mathscr{L}^\infty$ אמנם מרחב נורמי.

מקרה פרטי חשוב

ניקח u=מידת הספירה על $\mathbb{N}$. במקרה זה $\mathscr{L}^p(\mathrm{d}u)$ הוא מרחב של סדרות, שקרוי ℓ^p. עבור $1\le p\le\infty$ וסדרה $x=(x_n)_{n=1}^\infty$,

$$\|x\|_{\ell^p}=\left(\sum_{n=1}^\infty|x_n|^p\right)^{1/p}$$

עבור $p=\infty$

$$\|x\|_\infty=\sup_n|x_n|$$

תמיד

סדרה שייכת למרחב $\Longleftrightarrow$ הנורמה שלה סופית.
אי שוויון הולדר לסדרות אומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{1/q}$$

כאשר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
אי שוויון מינקובסקי לסדרות אומר עבור $1\le p\le\infty$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{1/p}$$

המשימה הבאה היא להוכיח שמרחבי $\mathscr{L}^p$ שלמים. נצטרך הכנה לזה.

משפט 3

מרחב נורמי X שלם $\Longleftrightarrow$ כל טור בX שמתכנס בהחלט מתכנס.
(ז.א. טור $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ בX מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$, ונוכיח שזה גורר התכנסות הטור עצמו בנורמה של X)

הוכחה

תחילה נניח שX שלם, ונניח ש$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$. רוצים להוכיח $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ מתכנס, ז.א. רוצים להוכיח שהסכומים החלקיים $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$ מתכנסים בנורמה של X לאיזה וקטור $x_0\in X$, אבל כיוון שX מרחב שלם מספיק להוכיח ש$\{S_n\}$ סדרת קושי. לצורך זה, יהי $\varepsilon>0$ נתון. כיוון שטור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ מתכנס הוא טור קושי, וקיים $k_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>m>k_0$, $\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|<\varepsilon$. נובע שאם $n>m>k_0$

$$\|S_n-S_m\|=\left\|\sum_{k=m+1}^{n}x_k\right\|\le\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|<\varepsilon$$

בזה הוכחנו ש$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי בX. X שלם ולכן קיים גבול

$$x_0=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$$

בפרט הטור מתכנס.

לצד השני: נוכיח שכל טור בX שמתכנס בהחלט מתכנס, ונקח איזו סדרת קושי $\{x_n\}$ בX. צ"ל שהיא מתכנסת. אבל לפי תנאי קושי קיים x_{n_1} בסדרה כך שלכל $n > n_1$ $\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2$. כמו כן קיים $n_2 > n_1$ כך שלכל $n > n_2$ $\|x_n - x_{n_2}\| < 1/4$. אפשר להמשיך בכך, ולבנות תת סדרה x_{n_k} כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$. כעת נבנה טור

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \cdots = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right)$$

לפי הבנייה טור זה מתכנס בהחלט, ולפי הנתון שלנו הוא מתכנס לאיזה $x_0 \in x$. הטור טלסקופי והסכומים החלקיים שלו בדיוק x_{n_k}, לכן הוכחנו $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, ובזה מצאנו תת סדרה של $\{x_n\}$ שמתכנסת בX.

טענה: $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ נתון. כיוון ש$\{x_n\}$ סדרת קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $m, n > N$ אז $\|x_m - x_n\| < \varepsilon/2$. כעת נקבע $n > N$ ונשים לב שקיים $k_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > k_0$ האינדקס $n_k > N$, בפרט עבור כל $k > k_0$ $\|x_{n_k} - x_n\| < \varepsilon/2$. נשאיף $k \to \infty$ ונסתמך על רציפות הנומרה(תרגיל קל!), לומר ש

$$\|x_0 - x_n\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_n\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

בסיכום: לכל $n > N$ $\|x_0 - x_n\| < \varepsilon$ ונובע: $x_n \to x_0$, בפרט יש גבול לסדרת קושי כלשהי $\{x_n\}$. לכן המרחב X שלם.

■

שאלה

מה זאת אומרת "הנורמה רציפה"? ואיך מוכיחים זאת?

תשובה

הכוונה שאם $x_n \to x$ בX, $\|x_n\| \to \|x\|$, וזה נכון כי לכל n $0 \leq |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$.

משפט 4

עבור $1 \leq p \leq \infty$ המרחבים $\mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$ שלמים.

הוכחה

כאן ניתן הוכחה עבור $1 \le p < \infty$. עבור $p = \infty$ ההוכחה יותר קלה, ונשאר לתרגיל.

ובכן, נקבע p, $1 \le p < \infty$, וניקח טור ב-$\mathscr{L}^p$ שמתכנס בהחלט. ע"פ משפט 3 יש רק להוכיח שהוא מתכנס ב-$\mathscr{L}^p$.

ובכן, הנתון הוא שלכל n, $f_n \in \mathscr{L}^p$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. כעת, עבור כל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

לפי אי שוויון המשולש,

$$\|g_n\|_p \le \sum_{k=1}^{n} \||f_k|\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \underset{\text{def}}{\equiv} M < \infty$$

ה-g_n עולים עם n, ולכן לכל $x \in X$ מוגדר $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \in [0,\infty]$. לפי התכנסות מונוטונית

$$\|g\|_p^p = \int_X g^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p^p \le M^p < \infty$$

בפרט $\int g^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$, ולכן $g(x) < \infty$ כב"מ($\mathrm{d}\mu$). לפי הגדרה

$$\infty > g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

ז.א. לכמעט כל x $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט ומוגדר היטב $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כב"מ, ובנקודות היוצאות מן הכלל נגדיר $f(x) = 0$.

טענה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס ל-$f(x)$ במובן של $\mathscr{L}^p$.

הוכחה: לכל n נגדיר סכום חלקי $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. לפי הבנייה שלנו $S_n(x) \to f(x)$ כב"מ. יותר על כן,

$$|S_n(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| = g_n(x)$$

וגם

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_n(x)| = g(x)$$

מתקיים $S_n - f \to 0$ כב"מ, ואנחנו צריכים להוכיח ש-$\lim_{n\to\infty} \int_X |S_n - f|^p \, \mathrm{d}m = 0$. אבל לפי השלבים לעיל לכמעט כל x

$$|f_n(x) - f(x)|^p \le |2g(x)|^p$$

ו

$$\int g^p \, \mathrm{d}\mu \le m^p$$

כפי שהוכחנו לעיל. יוצא ש$\left|S_n - f\right|^p \to 0$ בצורה נשלטת, ונוכל להסיק ממשפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left|S_n - f\right|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X 0^p \, \mathrm{d}\mu = 0$$

לכן $S_n \to f$ ב$\mathscr{L}^p$, או במילים אחרות, $f(x) = \sum f_n(x)$ במובן של $\mathscr{L}^p$.

נובע ש$\mathscr{L}^p(\mathrm{d}\mu)$ שלם, $1 \le p < \infty$.

■

מסקנה(מתוך ההוכחות)

אם אם $f_n \to f$ ב$\mathscr{L}^p$, $1 \le p < \infty$, אז יש תת סדרה $f_{n_k} \to f$ כב"מ בX.

דוגמאות

1. נשתמש במידת לבג $\mathrm{d}m$ על $[0,1]$. עבור $1 \le p < \infty$ נבנה סדרה $f_n \in \mathscr{L}^p(\mathrm{d}m)$ כך ש$f_n \to 0$ במובן של $\mathscr{L}^p$, אבל $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ אינו קיים באף נקודה של $[0,1]$.

ובכן: עבור $n \in \mathbb{N}$ נרשום $n = 2^k + L$. עבור $k \in \mathbb{N}$ ו$0 \le L < 2^k$ טבעי, ונגדיר $f_n(x) = I_{\left[\frac{L}{2^k}, \frac{L+1}{2^k}\right]}(x)$. יוצא ש<u>לכל</u> $x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המכילה ∞ אפסים ו∞ אחדים. לכן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ אינו קיים. אבל, אם $n = 2^k + L$ אז

$$\left\|f_n - 0\right\|_{\mathscr{L}^p}^p = \int_{[0,1]} \left|f_n\right|^p \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן $f_n \to 0$ ב$\mathscr{L}^p$, $1 \le p < \infty$.

הערה: ב$\mathscr{L}^\infty$ הסדרה f_n מתבדרת כי לכל n $\left\|f_n - 0\right\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f_n = 1 \nrightarrow 0$.

2. $f_n = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n & x = 1/n \\ 0 & x = 2/n \end{cases}$ ולינארית במעברים. לכל $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, אבל עבור $\mathscr{L}^1$

$$\left\|f_n - 0\right\|_{\mathscr{L}^1} = \int_0^1 \left|f - 0\right| \, \mathrm{d}m = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 1 \nrightarrow 0$$

ז.א. $f_n \to 0$ נקודתית אבל לא במובן של $\mathscr{L}^1$