מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 3

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. הוכח או הפרך: תהיינה A,B קבוצות, אזי:
   א. $P(A\setminus B)=P(A)\setminus P(B)$
   ב. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

2. הוכח או הפרך:
   א. $A\times(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}(A\times B_i)$
   ב. $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

3. תהי קב' A, נסמן $\{B_i\}_{i\in I}$, כאשר $I:=P(A)$ ו $B_i:=i$ (אוסף כל תת הקבוצות של A).
   מצאו:
   א. $\bigcap_{i\in I}B_i$ ו $\bigcup_{i\in I}B_i$.
   ב. $\bigcup_{j\in I}\bigcap_{i\in I}(B_i\cup B_j)$.
   ג. $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in I}(B_i\cap B_j)$.

4. בכל סעיף הוכיחו לגבי היחס R על הקבוצה הנתונה A האם הוא: רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי או טרנזיטיבי.
   א. $A:=\mathbb{Z}$, $R:=\{(x,y)\in A\times A:3|(x+2y)\}$ (כאן | הוא היחס מחלק את, כלומר היחס שמקבל ערך אמת אם המספר משמאל מחלק את זה שמימין).
   ב. $A:=P(\mathbb{N})$, $R:=\{(x,y)\in A\times A:x\subseteq y\}$
   ג. $A:=\mathbb{Q}$, $R:=\{(x,y)\in A\times A:(x<y)\vee(y<x)\}$

5. $\mathbb{Z}^*:=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$
   נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}$ באופן הבא:
   $$R:=\{((n_1,z_1),(n_2,z_2))\in\left(\left(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\right)\times\left(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}\right)\right)|\,n_2z_1=n_1z_2\}$$
   הוכיחו כי R הינו יחס שקילות (כלומר הוכיחו רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות).
   בונוס: מה הקשר בין היחס R לקבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$?

6. (בונוס) תהי סדרת קבוצות $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. נאמר כי קבוצה B היא הגבול של הסדרה $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ אם:
   $$a\in B\rightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:a\in A_n)$$
   $$a\notin B\rightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}:(\forall n>n_0:a\notin A_n)$$
   במקרה זה נסמן $\lim_{n\to\infty}A_n=B$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל B. אם אין גבול נאמר שהיא מתבדרת.
   א. מצאו סדרת קבוצות מתכנסת, וסדרת קבוצות מתבדרת. הוכיחו.

ב. תהי $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}: A_n \subseteq A_{n+1}$. הוכיחו שהסדרה $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת וגבולה הוא $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. כלומר $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.