דטרמיננטות ושיטת קרמר

1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות :

א. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15-(-8) = 23$$

ב. $\begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b)-a^2 = -b^2$$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -6 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -6 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -50+48 = -2$$

ד. $\begin{pmatrix} 14 & 2 & 11 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 14 & 2 & 11 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 14 & 2 & 11 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-5)(-2)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10(2-3) = -10$$

ה. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} \overset{R_1\to R_1+R_2+R_3+R_4}{=} \begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1\\R_4\to R_4-R_1}}{=}$$

$$6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix} = 6\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 48$$

2. עבור אילו ערכים של הפרמטר k מתקיימות המשוואות הבאות :

א. $\begin{vmatrix}k&k\\4&2k\end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix}k&k\\4&2k\end{vmatrix} = 2k^2-4k = 0 \Rightarrow k = 0,2$$

ב. $\begin{vmatrix}k&5\\4&2k\end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix}k&5\\4&2k\end{vmatrix} = 2k^2-20 = 12 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm 4$$

ג. $\begin{vmatrix}2&k-2&4\\3&k-1&6\\-1&-1&-2\end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix}2&k-2&4\\3&k-1&6\\-1&-1&-2\end{vmatrix} \overset{\substack{C_2\to C_2-C_1\\C_3\to C_3-2C_1}}{=} \begin{vmatrix}2&k-4&0\\3&k-4&0\\-1&0&0\end{vmatrix} = 0$$

לכל ערך של הפרמטר k

ד. $\begin{vmatrix}1&k&k&k\\k&1&k&k\\k&k&1&k\\k&k&k&1\end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \to R_1+R_2+R_3+R_4}{=} \begin{vmatrix} 1+3k & 1+3k & 1+3k & 1+3k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1+3k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_3 \to R_3 - kR_1 \\ R_4 \to R_4 - kR_1}}{=} (1+3k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$(1+3k)(1-k)^3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3},1$$

3. נתונות מטריצות הפיכות A ו- B , מסדר 3X3 , המקיימות:

$$\begin{cases} A^2 - 4B = 0 \\ 3A - B^2 = 0 \end{cases}$$

חשבו ערכים אפשריים עבור הדטרמיננטות של המטריצות A ו- B .

$$A^2 = 4B \Rightarrow |A^2| = |4B| \Rightarrow |A|^2 = 4^3|B|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{27^2}|B|^4 = 64|B| \Rightarrow$$

$$3A = B^2 \Rightarrow |3A| = |B^2| \Rightarrow 3^3|A| = |B|^2 \Rightarrow |A| = \frac{1}{27}|B|^2$$

מכיוון ש- $|B| \neq 0$

$$|B|^3 = 46656 \Rightarrow |B| = 36 \Rightarrow |A| = \frac{1}{27}\cdot 36^2 = 48$$

*4. **<u>פתרו בעזרת כלל קרמר את מערכות המשוואות הבאות</u>** :*

א. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_3 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_3 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{=} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_3 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_3 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -11 \end{vmatrix} = -9 \Rightarrow z = \frac{-9}{-3} = 3$$

ב. $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + 2R_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_3 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_3 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{-3} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + 2R_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow z = \frac{-3}{-3} = 1$$

ג. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3+3R_1}{=}\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 13\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 13\end{vmatrix}=18$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3+3R_1}{=}\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 13\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 13\end{vmatrix}=3\Rightarrow x_2=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}\overset{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-R_1}}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\Rightarrow x_2=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3+3R_1}{=}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 5\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=6\Rightarrow x_3=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

5. נתונים: $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2+2k & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ $\underline{B}=\begin{pmatrix}k\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

א. עבור אילו ערכים של הפרמטר k למערכת האי הומוגנית $A\underline{x}=\underline{B}$ פתרון יחיד?

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2+2k & -2\\ -1 & -2 & 5\end{vmatrix}\overset{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3+5R_1}}{=}\begin{vmatrix}5 & -2 & -1\\ -12 & 6+2k & 0\\ 24 & -12 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-12 & 6+2k\\ 24 & -12\end{vmatrix}=$$

$$-1(144-144-48k)=48k\Rightarrow|A|\neq 0\Leftrightarrow k\neq 0$$

ב. האם קיים ערך של הפרמטר k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x_1=x_3$?

לפי כלל קרמר

$$x_1=x_3\Rightarrow\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{|A_2|}{|A|}\Rightarrow|A_1|=|A_2|,|A|\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}k&-2&-1\\2&2+2k&-2\\1&-2&5\end{vmatrix}\overset{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\R_3\to R_3+5R_1}}{=}\begin{vmatrix}k&-2&-1\\2-2k&6+2k&0\\1+5k&-12&0\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}2-2k&6+2k\\1+5k&-12\end{vmatrix}=$$

$$-(-24+24k-6-30k-2k-10k^2)=10k^2+8k+30$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}5&-2&k\\-2&2+2k&2\\-1&-2&1\end{vmatrix}\overset{\substack{R_2\to R_2-2R_3\\R_1\to R_1+5R_3}}{=}\begin{vmatrix}0&-12&5+k\\0&6+2k&0\\-1&-2&1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-12&5+k\\6+2k&0\end{vmatrix}=$$

$$-1\left(-30-10k-6k-2k^2\right)=2k^2+16k+30\Rightarrow$$

$$2k^2+16k+30=10k^2+8k+30\Rightarrow 8k^2-8k=0\Rightarrow k=0,1\Rightarrow k=1$$

<u>תשובות</u>

1. א.23 ב. $-b^2$ ג. -2 ד. -10
2. א. $k=0,2$ ב. $k=\pm4$ ג. לכל ערך של הפרמטר k ד. $k=1,-\frac{1}{3}$
3. $|A|=48\ ,|B|=36$
4. א. $(1,2,3)$ ב. $(2,0,1)$ ג. $\left(\frac{1}{6}\ ,\frac{1}{6}\ ,\frac{1}{3}\right)$
5. א. $k\neq 0$ ב. $k=1$

6. הוכיחו שדטרמיננטה של מטריצה משולשת שווה למכפלת איברי האלכסון.
7. תהי A מטריצה ריבועית שכל מרכיביה מספרים שלמים.הוכיחו ש - A^{-1} אף היא כזו אם ורק אם $|A|=\pm1$.

<u>שאלות אמריקאיות:</u>

א.נתונה מטריצה ריבועית מגודל 3X3 ונתון ש- det(A)=2 .אזי

1. A הפיכה ו- det(A*)=4
2. A הפיכה ו-2 =(det(A*
3. A הפיכה ו-8 =(det(A*
4. A אינה הפיכה ו- 4 -=(det(A*
5. כל התשובות אחרות אינן נכונות

A הפיכה כי $\det(A)=2\neq0$ ו- $|A^*|=|A|^{3-1}=2^2=4$

ב.תהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. אזי ערך הדטרמיננטה $\det(A^{10}+A^9)$ הוא:

1. 2
2. 1
3. -1
4. 0
5. כל התשובות אחרות אינן נכונות

$$|A^{10}+A^9|=|A^9(A+I)|=|A^9|\cdot|A+I|=|A|^9\cdot|A+I|$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$|A+I|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3-R_1}{=}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$$

$$|A^{10}+A^9|=1^9\cdot 2=2$$

ג.נתונה מטריצה ריבועית מגודל 4x4 ונתון ש- $\det(A)=3$. אזי

1. A הפיכה ו- $\det(A^*)=27$
2. A הפיכה ו-$\det(A^*)=9$
3. A הפיכה ו- $\det(A^*)=81$
4. A אינה הפיכה ו-$\det(A^*)=18$
5. כל התשובות אחרות אינן נכונות

A הפיכה כי $\det(A)=3\neq 0$ ו- $|A^*|=|A|^{4-1}=3^3=27$

ד.דטרמיננטה $\begin{vmatrix}x&a&a&a\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}$ שווה ל-

1. $(x+3a)(x-a)^3$
2. $(x+3a)^2(x-a)^2$
3. $(x+3a)^3(x-a)$
4. $(x+3a)(x+a)^3$
5. כל התשובות אחרות אינן נכונות

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \overset{R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{=} \begin{vmatrix} x+3a & x+3a & x+3a & x+3a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} =$$

$$(x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_3 - aR \\ R_4 \to R_4 - aR}}{\overset{R_2 \to R_2 - aR_1}{=}} (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} =$$

$$(x+3a)(x-a)^3$$