

תרגיל 10

1. הוכיחו כי לכל $0 < y < x$ ו $\alpha > 1$ מתקיים

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^\alpha - y^\alpha < \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$$

פתרון:

נתבונן בפונקציה $f(x) = x^\alpha$. הפונקציה רציפה בקטע $[y, x]$ וגזירה בקטע (y, x) לכל $0 < y < x$. לכן, לפי משפט הערך הממוצע של לגראנז' נקבל כי קיימת נקודה $c \in (y, x)$ כך ש

$$\frac{x^\alpha - y^\alpha}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) = \alpha c^{\alpha-1}$$

כיון ש $0 < y < c < x$ ו $\alpha > 1$, נקבל כי

$$\alpha y^{\alpha-1} < \alpha c^{\alpha-1} < \alpha x^{\alpha-1} \implies \alpha y^{\alpha-1} < \frac{x^\alpha - y^\alpha}{x - y} < \alpha x^{\alpha-1}$$

נכפיל את אי השוויונים ב $x - y > 0$ ונקבל כי

$$\alpha y^{\alpha-1}(x-y) < x^\alpha - y^\alpha < \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$$

כדרוש.

2. יהי $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ פולינום מדרגה $n > 0$ (כלומר $a_n \neq 0$) חשבו את הגבולות

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

כאשר:

(א) $a_n > 0$, n טבעי אי-זוגי.

(ב) $a_n < 0$, n טבעי זוגי.

(ג) $a_n < 0$, n טבעי אי-זוגי.

פתרון:

יהי H מספר אינסופי. $f(H) = H^n (a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{H} + \dots + \frac{a_0}{H^n})$.

(א)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

הסבר:

עבור H אינסופי חיובי H^n אינסופי חיובי, וכיוון ש $a_n > 0$ הוא מספר משמעותי חיובי. ולכן מכפלתם היא מספר איסופי חיובי.

עבור H מספר אינסופי שלילי, כיוון ש n איזוגי H^n מספר איסופי שלילי. ולכן $a_n > 0$ הוא מספר משמעותי חיובי, ומכפלתם מספר איסופי שלילי.

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

הסבר:

עבור H אינסופי חיובי H^n אינסופי חיובי, וכיוון ש $a_n < 0$ הוא מספר משמעותי שלילי. ולכן מכפלתם היא מספר איסופי שלילי.

עבור H מספר אינסופי שלילי, כיוון ש n זוגי H^n מספר איסופי חיובי. ולכן $a_n < 0$ הוא מספר משמעותי שלילי, ומכפלתם מספר איסופי שלילי.

(ג)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

הסבר:

עבור H אינסופי חיובי H^n אינסופי חיובי, וכיוון ש $a_n < 0$ הוא מספר משמעותי שלילי. ולכן מכפלתם היא מספר איסופי שלילי.

עבור H מספר אינסופי שלילי, כיוון ש n איזוגי H^n מספר איסופי שלילי. ולכן $a_n < 0$ הוא מספר משמעותי שלילי, ומכפלתם מספר איסופי חיובי.

3. חשבו את הגבולות הבאים (גבול סופי ואינסופי) במידה והגבול לא קיים הסבירו מדוע.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1-x}} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} \sin x \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2} - x} \quad (\text{ה})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} \right) \quad (\text{ו})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (\text{ז})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} \quad (\text{ח})$$

פתרון:

- (א) יהי $0 < \epsilon \approx 0$ אינפי חיובי, אזי $f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$ מספר איסופי חיובי ולכן $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$
- (ב) יהי $0 > \epsilon \approx 0$ אינפי שלילי, אזי $f(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$ מספר איסופי שלילי ולכן $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$
- (ג) זהו גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$, נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2\sqrt{1-x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

הסבר: עבור H אינסופי שלילי $\sqrt{1-H}$ אינסופי חיובי ולכן $-2\sqrt{1-H} \left(1 - \frac{1}{H^2}\right)$ אינסופי שלילי.

- (ד) הגבול לא קיים. נראה זאת ע"י בחירת מספרים אינסופיים שונים:
עבור $H = 2\pi N + \frac{\pi}{2}$ כאשר N מספר היפר שלם אינסופי חיובי נקבל:

$$f(H) = e^{2(2\pi N + \frac{\pi}{2})} \sin\left(2\pi N + \frac{\pi}{2}\right) = e^{2(2\pi N + \frac{\pi}{2})} \cdot 1$$

מספר אינסופי שלילי.

עבור $H = 2\pi N - \frac{\pi}{2}$ נקבל:

$$f(H) = e^{2(2\pi N - \frac{\pi}{2})} \sin\left(2\pi N - \frac{\pi}{2}\right) = e^{2(2\pi N - \frac{\pi}{2})} \cdot (-1)$$

מספר איסופי שלילי.

כיוון שהגבול תלוי בבחירת H נקבל כי הגבול לא קיים.

- (ה) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$. נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin 3x}{-1} = \frac{(-3)(-1)}{(-1)} = -3$$

(ו) יהי $\epsilon \approx 0$.

$$\left(\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{1}{\epsilon^3}\right) = \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon^4}\right)$$

מספר אינסופי חיובי, ולכן $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}\right) = \infty$

(ז) יהי H מספר אינסופי חיובי.

$$f(H) = \frac{1}{\sqrt{H-1}} \approx 0$$

ולכן $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$

- (ח) זהו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1}$$

קיבלנו שוב גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ ולכן לפי לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = 2$$

ולכן גם $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} = 2$

4. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ ו- $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ אז $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty \text{ אם } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$$

פתרון:

(א) הוכחה:

יהי $c \approx a \neq c$. מהגדרת הגבול נובע כי $f(a) \approx 0$, ומהנתון ש $f(x) > 0$ נקבל $0 < f(a) \approx 0$, לכן, $\frac{1}{f(a)}$ מספר אינסופי חיובי כלומר $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(ב) הפרכה ע"י דוגמה נגדית:

ניקח למשל $f(x) = x$. מתקיים כי $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, אך $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ לא קיים, כיוון שעבור $0 < \epsilon \approx \frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר אינסופי חיובי, ועבור $0 < \epsilon \approx \frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר אינסופי שלילי.