חשבון אינפי 1

תרגיל 5

1. הוכיחו (באופן מפורש, ע"פ הגדרה) כי הסדרות הבאות מתכנסות לאינסוף

(א) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} 1/k\}_{n=1}^{\infty}$

נתבונן באיברים מהצורה $a_{2^K-1} = a_{2^{K-1}-1} + \frac{1}{2^{K-1}} + ... + \frac{1}{2^K-1}$. אזי מתקיים $\frac{1}{2^{K-1}} + \frac{1}{2^{K-1}+1} + ... + \frac{1}{2^K-2} + \frac{1}{2^K-1} > \frac{2^{K-1}}{2}\left(\frac{1}{2^{K-1}} + \frac{1}{2^K-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2^{K-1}}{2(2^K-1)}$. מאחר וערך האיבר הראשון גדול מחצי, וכן ההפרש בין איבר לאיבר, מתקיים גם $a_{2^K-1} > \frac{K}{2}$. אם כך, לכל M שנבחר ניתן למצוא n שממנו $a_n > M$ באופן הבא: מ $a_{2^K-1} > \frac{K}{2} > M$ נובע $K > 2M$ כלומר $n = 2^K - 1 > 2^{2M} - 1$. לכן נבחר $n_0 = 2^{2M}$, ועבור כל $n > n_0$ מתקיים $a_n > a_{n_0} = a_{2^{2M}} > a_{2^{2M}-1} > \frac{2M}{2} = M$ וסיימנו.

(ב) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}\}_{n=1}^{\infty}$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} > M$ לכל $n > n_0 > M^2$.

2. חשבו את הגבולות הבאים

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{1000n}{n^2-2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1000n}{n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n-2/n} = 0$$

(ב) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1})$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+1/n+1/n^2}+\sqrt{1+1/n-1/n^2}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-1)(\sqrt{n^3-n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-1)(\sqrt{n^3-n}+n)}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5-n^3+n^4-n^2}+\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^3-n}-n}{\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^3}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-1/n^2+1/n-1/n^3}+\sqrt{1/n+1/n^2}-\sqrt{1/n^2-1/n^4-1/n^{10}}}{\sqrt{1/n+1/n^4}-\sqrt{1/n^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

(ד) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})\frac{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n^{2/3}}{\sqrt[3]{n^2/n^2+2n/n^2+1/n^2}+\sqrt[3]{n^2/n^2+n/n^2}+\sqrt[3]{n^2/n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

(ה) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(ו) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots \frac{n-1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$

(ז) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$
$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!}\frac{(n+1)!}{2n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

(ח) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\dots\cdot(2n-1)}{n!}$

ע"פ מבחן המנה $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\dots\cdot(2n-1)(2n+1)}{(n+1)!}\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\dots\cdot(2n-1)} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1$ ולכן הגבול המבוקש הוא ∞.

(ט) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n}$

$7 = \sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n} < \sqrt[n]{3\cdot7^n} = 7\sqrt[n]{3}$ ולכן, ע"פ משפט הסנדויץ' $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n} = 7$

(י) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\dots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\dots\cdot\sqrt[2^n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{2}}$. כעת $1 < \sqrt[2^n]{2} < \sqrt[n]{2}$ ולכן ע"פ משפט הסנדויץ' $\sqrt[2^n]{2} \to 1$ והגבול המבוקש הוא 2.

(יא) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\dots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$

ע"פ מבחן המנה $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}+\sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2}-1 < 1$
ולכן הגבול המבוקש הוא 0.

(יב) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{3n^2+3n+5}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)^{3n^2+3n+5} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+n}\right]^{\frac{3n^2+3n+5}{n^2+n}} = e^3$

(יג) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(ne^5)}{\ln n}\right)^{\ln n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(ne^5)}{\ln n}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{(\ln n)/5}\right)^{(\ln n)/5}\right]^5 = e^5$

3. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות והסבירו מדוע אלה כולם:

א. $$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{n-7\left[\frac{n}{7}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$$

פתרון :

נתבונן בתתי סדרה הבאות:

$$\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}=\left\{(7n+i)-7\left[\frac{7n+i}{7}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$$

כאשר $0\le i\le 6$ קבוע .

$$\left[\frac{7n+i}{7}\right]=\left[n+\frac{i}{7}\right]\underset{\frac{i}{7}<1}{\overset{\uparrow}{=}}n$$

$$\Rightarrow\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}=\{7n+i-7n\}_{n=1}^{\infty}=\{i\}_{n=1}^{\infty}$$

מכאן ישנם 7 גבולות חלקיים שונים והגבולות החלקיים השונים הם 0,1,2,3,4,5,6 בהתאם לערך של i .

אלה הם גבולות חלקיים יחידים, כי

1. אם נוסיף לסדרה מהסוג $\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}$ מספר סופי של איברים מתת סדרה אחרת הגבול של $\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}$ יישאר i .

2. אם נוסיף לסדרה מהסוג $\{a_{7n+i}\}_{n=1}^{\infty}$ אינסוף איברים מסוג אחר נקבל תת סדרה בעלת לפחות שתי תתי סדרה עם גבולות שונים ולכן תת סדרה שנקבל לא תתכנס כלל .

מ-1 ו- 2 נובע שהגבולות החלקיים היחידים הם $0\le i\le 6$, $i\in\mathbb{N}$.

ב. $$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{7^n+(-7)^n}{5^n}\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

פתרון :

נגדיר :

$$\{c_n\}=\left\{\cos\frac{\pi n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \{b_n\}=\frac{7^n+(-7)^n}{5^n}$$

$$a_n=b_nc_n\ \forall n\ge 1$$

$$\lim_{n\to\infty}b_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^{2n+1}+(-7)^{2n+1}}{5^{2n+1}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 7^{2n}}{5^{2n}}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}c_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}c_{4n}=\lim_{n\to\infty}\cos 2\pi n=1$$

$$\lim_{n\to\infty}c_{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\cos(2\pi n+\pi)=-1$$

ומכאן נקבל שהגבולות החלקיים של הסדרה $\{a_n\}_{n=-1}^{\infty}$ הם :

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1}c_{2n+1} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{4n} = \lim_{n\to\infty} b_{4n}c_{4n} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} b_{4n+2}c_{4n+2} = -\infty$$
ואלה הם גבולות חלקיים יחידים . הוכחה ליחידות הגבולות דומה לסעיף א'.

ג. $$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{\sqrt{\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

פתרון :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[4]{2n+\sqrt{3n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2n^{-\frac{1}{6}}}}{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}n^{-\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

זהו גבול חלקי יחיד , כי הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת ולכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול .

4. הוכיחו או הפריכו:

א. הוכיחו כי $\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim}a_n$.

פתרון :

קיימת תת סדרה $\{-a_{n_k}\}$ של $\{-a_n\}$ כך ש $\lim_{k\to\infty}(-a_{n_k}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n)$

$$\Rightarrow -\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{\lim}(-a_n)$$

וכן לכל תת סדרה $\{-a_{n_l}\}$ של $\{-a_n\}$ מתקיים $\lim_{l\to\infty}(-a_{n_l}) \le \lim_{k\to\infty}(-a_{n_k}) = \overline{\lim}(-a_n)$

$$\Rightarrow -\lim_{l\to\infty}(a_{n_l}) \le -\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{\lim}(-a_n)$$

ולכן

$\lim_{l\to\infty}(a_{n_l}) \ge \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\overline{\lim}(-a_n)$ לכל תת סדרה $\{a_{n_l}\}$ של $\{a_n\}$.

אם כן , קיבלנו ש-

$$\underline{\lim}a_n = -\overline{\lim}(-a_n)$$
$$\Leftrightarrow -\underline{\lim}a_n = \overline{\lim}(-a_n)$$

ב. אם לכל n , $a_n > 0$ ומתקיים $\overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = 1$, אזי הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים.

פתרון :

מהנתון נקבל ש $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n}$ והם סופיים. נראה כי מנתוני השאלה גם נובע כי:

(*) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n}$ ולכן נסיק כי $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ ומכאן $\lim_{n\to\infty} a_n$ קיים .

נוכיח כעת את (*) : תחילה נראה כי $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n} \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}$. קיימת תת סדרה $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ של $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}$ נקבל מכיוון שאיברי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ חיוביים ש $0 \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ אבל $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \ne 0$ (אחרת לא נקבל $\overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\frac{1}{a_n} = 1$ בסתירה לנתון) ומכאן

$$0 < \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \Rightarrow \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n} \ge \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}$$

שנית נוכיח ש $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n} \ge \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n}$ אומנם , קיימת תת סדרה $\left\{a_{n_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ שעבורה מתקיים $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{l\to\infty} a_{n_l}$ ומתקיים $\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{l\to\infty} a_{n_l}} = \lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{a_{n_l}} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}$. בסה"כ נסיק $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n}$ ונקבל הדרוש .

ג. $\overline{\lim}\left(a_n - b_n\right) = \overline{\lim}\, a_n - \overline{\lim}\, b_n$

פתרון :

הטענה לא נכונה .

דוגמא נגדית :

נגדיר סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2k \quad\quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

וסדרה $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ 2 & n = 2k \quad\quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

במקרה זה

$$a_n - b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ -2 & n = 2k \quad\quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ולכן $\overline{\lim}\left(a_n - b_n\right) = 0$, אבל $\overline{\lim} a_n = 1, \overline{\lim} b_n = 2$,

ולכן $\overline{\lim} a_n - \overline{\lim} b_n = 1 - 2 = -1 \ne 0$.

ד. $\underline{\lim}\left(a_n b_n\right) = \underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n$

פתרון :

הטענה לא נכונה

דוגמא נגדית :

נגדיר סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ -1 & n = 2k \quad\quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

וסדרה $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ -2 & n = 2k \quad\quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

במקרה זה

$\underline{\lim} a_n \cdot \underline{\lim} b_n = -1 \cdot (-2) = 2$, אבל

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \quad k \in \mathbb{N} \\ 2 & n = 2k \quad\quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ולכן $\underline{\lim}(a_n b_n) = 0 \neq 2$

בהצלחה !!!