# ב"א אנליזה 2 תשעו מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int x^2\ln\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int x^2\ln\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{cc} f=\ln\left(x^2+x-2\right) & f'=\frac{2x+1}{x^2+x-2}\\ g'=x^2 & g=\frac{x^3}{3}\end{array}\right\}=\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right)-\int\frac{2x+1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x$$

ונמשיך לחשב את $\int\frac{(2x+1)x^3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$ בעזרת שברים חלקיים ואז נחבר הכל לתשובה סופית. נחלק את הפולינמום $(2x+1)\,x^3=2x^4+x^3$ בפולינומום $x^2+x-2$:

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2\ -x\ +5\\ x^2+x-2 & 2x^4\ +x^3\\ & -2x^4-2x^3+4x^2\\ & -x^3+4x^2\\ & x^3\ +x^2-2x\\ & 5x^2-2x\\ & -5x^2-5x+10\\ & -7x+10\end{array}$$

וקיבלנו ש $2x^4+x^3=\left(2x^2-x+5\right)\left(x^2+x-2\right)+\left(-7x+10\right)$ ולכן

$$\int\frac{(2x+1)\,x^3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\int\left(2x^2-x+5\right)\mathrm{d}x+\int\frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x+\int\frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$$

ונמשיך עם חישוב $\int\frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$. כיוון ש $x^2+x-2=(x+2)\,(x-1)$, קיימים $A,B$ קבועים כך ש

$$\frac{-7x+10}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל $-7x+10=A\,(x-1)+B\,(x+2)$. הצבה $x=1$ תתן $3=3B$ ולכן $B=1$. הצבה $x=-2$ תתן $24=-3A$ ולכן $A=-8$. ולכן

$$\int\frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{-8}{x+2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=-8\ln|x+2|+\ln|x-1|+C$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית היא:

$$\begin{aligned}\int x^2\ln\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x =& \frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right)-\int\frac{2x+1}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x\\ =&\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x+\int\frac{-7x+10}{x^2+x-2}\mathrm{d}x\right)\\ &\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+x-2\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x+\left(-8\ln|x+2|+\ln|x-1|\right)\right)+C\end{aligned}$$

(ב) $\int\frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int\frac{\ln^2(x)}{x}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c} t=\ln(x)\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\ln^3(x)}{3}+C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת בסביבת אפס, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\{0\cdot\text{חסומה}\}=0$$

ולכן אין אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\{\infty\cdot\cos(0)\}=\infty$$

ואין אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to-\infty}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\{-\infty\cdot\cos(0)\}=-\infty$$

ואין אסימפטוטה משופעת משמאל (וזה לא מפתיע שהרי הפונקציה היא זוגית).

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא $\infty$ שהרי ב $x=1$ נקבל $\sin(1)$. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם מתכנס. לכל $1\le x$ מתקיים כי $0<\frac{1}{x^2}\le 1$ ולכן $\sin(\frac{1}{x^2})>0$ ולכן אפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}\underbrace{=}_{\text{L'Hopital},\ \frac{0}{0}}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'\cos(\frac{1}{x^2})}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\cos(\frac{1}{x^2})=\cos(0)=1$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x}\ln\left(1+\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t}{x^3}\ .$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x}\ln\left(1+\sin^2(t)\right)=0$ (כיוון ש $\ln\left(1+\sin^2(t)\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x}\ln\left(1+\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t}{x^3}\underbrace{=}_{\text{L'Hopital}, \frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2(x)\right)+\ln\left(1+\sin^2(-x)\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{3x^2}$$

ומכיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{\sin^2(x)}\cdot\frac{\sin^2(x)}{x^2}=1^2\cdot 1^2=1$$

נקבל שהתשובה הסופית היא

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(1+\sin^2(x)\right)}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}$

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(n+k\right)-\ln(n)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

ועבור $f(x)=\frac{1}{1+x}$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

.4

(א) קרבו את $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{1{,}000}$.

פתרון: טור טיילור של $e^x$ הוא

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $-x^2$ במקום $x$, נקבל

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

ולכן

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1\left(x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

וכעת: כיוון שזהו טור לייבניץ מתקיים שלכל $k$, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right|\le\left|\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{2k+1}\right|=\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2k+1}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{1000}$ נחפש $k$ עבורו $\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2k+1}\leq\frac{1}{1000}$. עבור $k=5$ נקבל $\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{11}<\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{5-1}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\frac{1}{4!\cdot 9}=\frac{5651}{7560}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{1000}$כמבוקש.

(ב) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^{n+1}}$ .

פתרון: נסדר קצת

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9}\cdot\frac{n\cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{2}{9}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ונחשב $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. זהו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}$ שהציבו בו $x=\frac{2}{3}$. כיוון ש $|x|<1$ במקרה שלנו ניתן לחשב כך:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-1\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\left((1-x)^{-1}-1\right)'=(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

ולכן

$$\frac{2}{9}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=2$$

.5

(א) תהיינה פונקציות $f,g$ רציפות כך ש $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ לכל $0\leq x$. הוכיחו כי $g(x)=f(x)$ לכל $0\leq x$.

פתרון: לפי המשפט היסודי של החדוא נקבל שהפונקציות $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ו $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ גזירות (כיוון ש $f,g$ רציפות) ומתקיים $F'(x)=f(x)$ וגם $G'(x)=g(x)$. כיוון שנתון ש $F(x)=G(x)$ נקבל שגם $F'=G'$ וזה מה שרצינו להוכיח.

(ב) תהיינה $f$ רציפה כך ש $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$ לכל $0\leq x$. הוכיחו כי $f$ פונקציה זוגית.

פתרון: לפי המשפט היסודי של החדוא נקבל שהפונקציות $F_1(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ וגם $F_2(x)=\int_{-x}^0 f(t)$ גזירות (כיוון ש $f$ רציפה) ומתקיים

$$F_1'(x)=f(x),F_2'(x)=f(-x)$$

ומכיוון שנתון ש $F_1(x)=F_2(x)$ נקבל שגם $F_1'=F_2'$, כלומר $f(x)=f(-x)$ לכל $0\leq x$ וזה מוכיח ש $f$ אי זוגית , כפי שרצינו להוכיח.