

## ב"א אנליזה 2 תשעו מועד ב

1. חשבו את:

$$\int x^2 \ln(x^2 + x - 2) dx \quad (\text{א})$$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int x^2 \ln(x^2 + x - 2) dx = \left\{ \begin{array}{l} f = \ln(x^2 + x - 2) \\ g' = x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} f' = \frac{2x+1}{x^2+x-2} \\ g = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + x - 2) - \int \frac{2x+1}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

ונמשיך לחשב את  $\int \frac{(2x+1)x^3}{x^2+x-2} dx$  בעזרת שברים חלקיים ואז נחבר הכל לתשובה סופית. נחלק את הפולינום  $(2x+1)x^3 = 2x^4 + x^3$  בפולינום  $x^2 + x - 2$ :

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 5 \\ x^2 + x - 2 \overline{) 2x^4 + x^3} \\ \underline{-2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \phantom{0} \\ -x^3 + 4x^2 \phantom{0} \\ \underline{x^3 + x^2 - 2x} \phantom{0} \\ 5x^2 - 2x \phantom{0} \\ \underline{-5x^2 - 5x + 10} \phantom{0} \\ -7x + 10 \end{array}$$

וקיבלנו ש  $2x^4 + x^3 = (2x^2 - x + 5)(x^2 + x - 2) + (-7x + 10)$  ולכן

$$\int \frac{(2x+1)x^3}{x^2+x-2} dx = \int (2x^2 - x + 5) dx + \int \frac{-7x+10}{x^2+x-2} dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + \int \frac{-7x+10}{x^2+x-2} dx$$

ונמשיך עם חישוב  $\int \frac{-7x+10}{x^2+x-2} dx$ . כיוון ש  $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ , קיימים  $A, B$  קבועים כך ש

$$\frac{-7x+10}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

נעשה מכנה משותף והשוואת מונים לקבל  $-7x + 10 = A(x-1) + B(x+2)$ . הצבה  $x = 1$  תתן  $3 = 3B$  ולכן  $B = 1$ . הצבה  $x = -2$  תתן  $24 = -3A$  ולכן  $A = -8$ . ולכן

$$\int \frac{-7x+10}{x^2+x-2} dx = \int \frac{-8}{x+2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -8 \ln|x+2| + \ln|x-1| + C$$

ובסה"כ נקבל שהתשובה הסופית היא:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(x^2 + x - 2) dx &= \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + x - 2) - \int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^3}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + x - 2) - \frac{1}{3} \left( \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + \int \frac{-7x + 10}{x^2 + x - 2} dx \right) \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(x^2 + x - 2) - \frac{1}{3} \left( \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + (-8 \ln|x + 2| + \ln|x - 1|) \right) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx \quad (\text{ב})$$

**פתרון:** נשתמש בהצבה:

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3(x)}{3} + C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה  $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  **פתרון:** אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת באפס, נחשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \{0 \cdot \text{חסומה}\} = 0$$

ולכן אין אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \{\infty \cdot \cos(0)\} = \infty$$

ואין אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \{-\infty \cdot \cos(0)\} = -\infty$$

ואין אסימפטוטה משופעת משמאל (וזה לא מפתיע שהרי הפונקציה היא זוגית).

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

**פתרון:** הנקודה הבעייתית היחידה היא  $\infty$  שהרי ב  $x = 1$  נקבל  $\sin(1)$ . נראה שהאינטגרל שלנו של חבר של האינטגרל  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  שמתכנס ולכן גם מתכנס. לכל  $1 \leq x$  מתקיים  $0 < \frac{1}{x^2} \leq 1$  ולכן  $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) > 0$  ולכן אפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{0}{0}, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)' \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cos(0) = 1$$

וקיבלנו שהאינטגרלים חברים.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x \ln(1 + \sin^2(t)) dt}{x^3}$$

**פתרון:** כיוון ש  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \ln(1 + \sin^2(t)) dt = 0$  (כיוון ש  $\ln(1 + \sin^2(t))$  רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x}^x \ln(1 + \sin^2(t)) dt}{x^3} \stackrel{\infty, L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x)) + \ln(1 + \sin^2(-x))}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + \sin^2(x))}{3x^2}$$

ומכיוון ש

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{\sin^2(x)} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1^2 \cdot 1^2 = 1$$

נקבל שהתשובה הסופית היא

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + \sin^2(x))}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln(n)}{n}$  **פתרון:** נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k) - \ln(n)}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

ועבור  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  שהיא רציפה בקטע  $[0, 1]$  נקבל ש

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

.4

(א) קרבו את  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  עד כדי שגיאה של  $\frac{1}{1,000}$ . **פתרון:** טור טיילור של  $e^x$  הוא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב  $-x^2$  במקום  $x$ , נקבל

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

ולכן

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 (x^{2n}) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

וכעת: כיוון שזהו טור לייבניץ מתקיים שלכל  $k$ , יש את החסם

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right| \leq \left| \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{2k+1} \right| = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2k+1}$$

זהו חסם על השגיאה  $\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right|$ . כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ  $\frac{1}{1000}$  נחפש  $k$  עבורו  $\frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2k+1} \leq \frac{1}{1000}$ . עבור  $k=5$  נקבל  $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$ . מכאן שהקירוב  $\frac{1}{120} \cdot \frac{1}{11} < \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$

$$\sum_{n=0}^{5-1} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \frac{1}{4! \cdot 9} = \frac{5651}{7560}$$

עם שגיאה קטנה מ  $\frac{1}{1000}$  כמבוקש.

(ב) חשבו את  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^{n+1}}$ . **פתרון:** נסדר קצת

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \cdot \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ונחשב  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ . זהו הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$  שהציבו בו  $x = \frac{2}{3}$ . כיוון ש  $|x| < 1$  במקרה שלנו ניתן לחשב כך:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 \right)' = \left( \frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \left( (1-x)^{-1} - 1 \right)' = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ולכן

$$\frac{2}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2$$

.5

(א) תהינה פונקציות  $f, g$  רציפות כך ש  $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x g(t) dt$  לכל  $0 \leq x$ . הוכיחו כי  $f(x) = g(x)$  לכל  $0 \leq x$ . **פתרון:** לפי המשפט היסודי של החדוא נקבל שהפונקציות  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  ו  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$  גזירות (כיוון ש  $f, g$  רציפות) ומתקיים  $F'(x) = f(x)$  וגם  $G'(x) = g(x)$ . כיוון שנתון ש  $F(x) = G(x)$  נקבל שגם  $F' = G'$  וזה מה שרצינו להוכיח.

(ב) תהינה  $f$  רציפה כך ש  $\int_0^x f(t) dt = \int_{-x}^0 f(t) dt$  לכל  $0 \leq x$ . הוכיחו כי  $f$  פונקציה זוגית. **פתרון:** לפי המשפט היסודי של החדוא נקבל שהפונקציות  $F_1(x) = \int_0^x f(t) dt$  וגם  $F_2(x) = \int_{-x}^0 f(t) dt$  גזירות (כיוון ש  $f$  רציפה) ומתקיים

$$F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(-x)$$

ומכיוון שנתון ש  $F_1(x) = F_2(x)$  נקבל שגם  $F_1' = F_2'$ , כלומר  $f(x) = f(-x)$  לכל  $0 \leq x$  וזה מוכיח ש  $f$  אי זוגית, כפי שרצינו להוכיח.