שיעורי בית 7

20 בדצמבר 2015

1. תהא G חבורה סופית. נסמן ב $\sim$ את יחס הצמידות.

(א) יהא $x \in G$, ונסמן $H = C(x) = \{g \in G \,:\, gx = xg\}$ המרכז של x. נגדיר יחס שקילות נוסף על G:

$$g_1 \equiv g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in H$$

הוכח כי גודל קבוצת המנה שווה לגודל מחלקת הצמידות של x. כלומר

$$|{}^{G}\!/\!_{\equiv}| = |[x]_{\sim}|$$

הדרכה: הראו שניתן להגדיר פונקציה

$$f : {}^{G}\!/\!_{\equiv} \to [x]_{\sim}$$

ע"י

$$\forall [g]_{\equiv} \in {}^{G}\!/\!_{\equiv} \,:\, f([g]_{\equiv}) = gxg^{-1}$$

ושפונקציה זאת חח"ע ועל.

פתרון : מוגדרות f. נניח $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$ צ"ל כי $f([g_1]_{\equiv}) = ([g]_{2\equiv})$ כלומר כי $g_1 x g_1^{-1} = g_2 x g_2^{-1}$. מהנתון נקבל כי $g_1^{-1} g_2 \in H \iff g_1 \equiv g_2$ כלומר כי $g_1^{-1} g_2 x = x g_1^{-1} g_2$ ואז

$$g_1 x g_1^{-1} = g_1 \left(x g_1^{-1} g_2 \right) g_2^{-1} = g_1 \left(g_1^{-1} g_2 x \right) g_2^{-1} = g_2 x g_2^{-1}$$

בנוסף ברור כי $gxg^{-1} \in [x]_{\sim}$ לפי הגדרת מחלקת שקילות.

טענה f חח"ע. הוכחה נניח $f([g_1]_{\equiv}) = ([g]_{2\equiv})$ צ"ל $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$. מהנתון נסיק כי $g_1 x g_1^{-1} = g_2 x g_2^{-1}$. ע"י הכפלה ב g_1^{-1} משמאל ו g_2 מימין נקבל כי $x g_1^{-1} g_2 = g_1^{-1} g_2 x$ כלומר $g_1^{-1} g_2 \in H$ שזה גורר $g_1 \equiv g_2$ שזה שקול ל $[g_1]_{\equiv} = [g_2]_{\equiv}$.

טענה: f על. הוכחה: יהא $y\in[x]_\sim$ צריך למצוא לו מקור. מהגדרת מחלקת שקילות $y=gxg^{-1}$ עבור $g\in G$ כלשהוא. אזי מתקיים $f([g]_\equiv)=gxg^{-1}=y$ וסיימנו.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי גודל מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה. כלומר לכל $x\in G$ מתקיים

$$|G|=k\,|[x]_\sim|$$

עבור kשלם כלשהוא.

פתרון : לפי משפט לגרנז וסעיף קודם נקבל כי

$$\frac{|G|}{|H|}=|{}^{G}\!/\!_{\equiv}|=|[x]_\sim|$$

ואז

$$|G|=|H|\cdot|[x]_\sim|$$

וסיימנו.

2. תהא G חבורה עם p^n איברים (p מספר ראשוני, n מספר טבעי) הוכיחו כי במרכז של G קיים יותר מאיבר אחד (כמובן שהאיבר הנטראלי תמיד שייך למרכז..) כלומר

$$|Z(G)|>1$$

הדרכה: השתמשו בכך ש

(א) Gהיא איחוד זר של מחלקות צמידות. (ומה גודל מחלקת שקילות של איבר במרכז?)

(ב) בשאלה הקודמת

(ג) בחבורה $\mathbb{Z}_p$ (שקילות מספרים שלמים מודולו p)

פתרון : לפי תכונה של יחס שקילות, G היא איחוד זר של מחלקות השקילות שלה. כלומר

$$G=\bigcup_{x\in G}[x]_\sim$$

ואם נבטל "כפילויות" נקבל איחוד זר. כלומר

$$G=\biguplus_{A\in {}^{G}\!/\!_{\sim}} A$$

ולכן

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A|$$

במילים: הגודל של G שווה לסכום גודלי מחלקות השקילות (הזרות).

כעת לכל $x \in Z(G)$ מתקיים כי $[x]_\sim = \{x\}$

$$|G| = \sum_{A \in G/\sim} |A| = \sum_{|A|=1} |A| + \sum_{|A|>1} |A| = |Z(G)| + \sum_{|A|>1} |A|$$

כעת, כל מחלקת צמידות A מקיימת כי $|A| = p^k$ עבור $0 \leq k \leq n$ (לפי סעיף קודם, גודל מחלקת צמידות מחלקת את גודל החבורה).

בנוסף לכל מחלקת צמידות A עם יותר מאיבר אחד מתקיים כי $|A| = p^k$ עבור $1 \leq k \leq n$ ולכן מודולו p מתקיים כי $|A| = 0 \mod p$ ולכן

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{|A|>1} |A| = p^n - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p^k$$

כאשר α_k זה מספר מחלקות הצמידות מגודל p^k. ולכן מודולו p נקבל כי

$$|Z(G)| = 0 \mod p$$

ולכן $|Z(G)| = p^l$. כיוון ש $|Z(G)| > 1$ כי איבר היחידה שייך למרכז, נקבל כי במרכז יש לפחות p איברים.

3. תהא G חבורה סופית. H תת חבורה של G ו K תת חבורה של H. הוכח כי

$$|G/K| = |G/H| \cdot |H/K|$$

פתרון : נתוןממשפט לגרנז

$$|G/K| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|K|} = |G/H| \cdot |H/K|$$

4.

(א) תהא G חבורה. יהא $g \in G$ מסדר n (n טבעי). יהא $n = ab$ פירוק של המספר n. הוכח כי הסדר של g^a הוא b

פתרון : נתון כי $g^n = e$ ובנוסף, לכל $0 < m < n$ מתקיים $g^m \neq e$. נסמן $h = g^a$. צ"ל $o(h) = n$

מתקיים $h^b = (g^a)^b = g^{ab} = g^n = e$ ולכן $o(h) \leq n$. נניח בשלילה כי $m = o(h) < n$

אזי $e = h^m = (g^a)^m = g^{am}$ אבל $am < ab = n$ סתירה לנתון.

(ב) טענה: תהא G חבורה בת p^n איברים (כאשר p מספר ראשוני ו n מספר טבעי). הוכח כי קיים $g \in G$ מסדר p. (רמז: ניתן להוכיח טענה זאת באינדוקציה).

פתרון : עבור $n = 1$. יש p איברים ואז לפי משפט מההרצאה קיים לה יוצר והוא מסדר p.

כעת נניח שלכל חבורה מסדר p^m $0 < m < n$ קיים איבר מסדר p. נוכיח כי גם לחבורה בסדר p^n יש איבר מסדר p.

יהא $e \neq g \in G$ אזי הסדר שלו מחלק את p^n. אם הסדר שלו הוא p^n אזי לפי התרגיל הקודם $h = g^{p^{n-1}}$ מסדר p.

אחרת הסדר שלו p^m כאשר $0 < m < n$ ולכן סדר החבורה $\langle g \rangle$ הוא p^m לפי הנחת האינדוקציה יש $h \in \langle g \rangle$מסדר p. $h \in G$ מסדר p.

.5

(א) תהא G חבורה. H תת חבורה. הוכח כי מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים.

כלומר הקבוצות$K_1 = \{gH \,|g \in G\}$ $K_2 = \{Hg \,|g \in G\}$בעלות עוצמה שווה.

(הדרכה : הגדר $\phi : K_1 \to K_2$ ע"י $\phi(gH) = Hg^{-1}$. הוכח כי ϕ מוגדרת היטב, חח"ע ועל)

פתרון : טענה ϕ מוגדרת היטב

הוכחה: נניח $g_1H = g_2H$ צ"ל כי $\phi(g_1H) = Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1} = \phi(g_2H)$.

אם $g_1H = g_2H$ אז $g_2^{-1}g_1 \in H$ כיוון ש H תת חבורה אז גם ההופכי $\left(g_2^{-1}g_1\right)^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$ ואז $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$.

חח"ע: נניח $\phi(g_1H) = \phi(g_2H)$ צ"ל $g_1H = g_2H$

מההנחה $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$ כלומר $g_1^{-1}g_2 \in H$ כמו מקודם, H תת חבורה ולכן גם ההופכי $g_2^{-1}g_1 \in H$ ואז $g_1H = g_2H$

על: יהא $Hg \in K_2$ המקור שלו יהיה $g^{-1}H \in K_1$

(ב) תהא G חבורה. H ת"ח. הוכח כי אם הסדר של G/H הוא 2 אז מתקיים כי

$$\forall g \in G : \; gH = Hg$$

פתרון : יהא $g \in G$ צ"ל $gH = Hg$. אם $g \in G$ אזי $gH = H = Hg$

אחרת H $g \notin H$ ואז $gH \neq H$ (כי יש רק 2 אברים בקבוצת המנה). מתרגיל קודם נסיק כי גם מספר הקוסטים הימניים הוא 2. כיוון ש Hg קוסט ימני שונה מ H נקבל כי $gH = G \backslash H = Hg$