תרגיל 4 מבוא לתורת החבורות

שאלה 4.1 קודם כל נזכיר: עבור $a,b\in\mathbb{Z}$ מספרים שלמים, הכופל המשותף המזערי שלהם - $m=\operatorname{lcm}(a,b)$ - הוא המספר הכי קטן שמקיים $a\mid m$ ו $b\mid m$. אפשר להוכיח שאם יש מספר אחר x כך ש $a\mid x$ ו $b\mid x$ אזי $m\mid x$. כמו כן, ידוע כי

$$\operatorname{lcm}(a,b)=\frac{ab}{\gcd(a,b)}$$

1. תהינה G,H חבורות שבהן לכל איבר יש סדר סופי. ניקח $g\in G$ ו $h\in H$. הוכיחו כי הסדר של (g,h) בחבורה $G\times H$ הוא

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{o}(g),\operatorname{o}(h))$$

2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$ היא חבורה ציקלית אם ורק אם n ו m זרים.

שאלה 4.2 תהי $G=\langle g\rangle$ חבורה ציקלית ו $H\leq G$ תת חבורה. הוכיחו כי גם H חבורה ציקלית.

הדרכה: קחו את ה k המינימלי עבורו $g^k\in H$. הוכיחו כי $H=\langle g^k\rangle$.

שאלה 4.3 בכל אחד מהמקרים הבאים. תארו את הקוסטים של תת החבורה H בחבורה G (לא משנה אם קוסטים ימניים או שמאליים, אין הבדל בדוגמאות כאן):

1. $G=U_{30}$ ו $H=\langle 11\rangle$.
2. $G=(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ ו $H=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$
3. עבור A,B חבורות כלשהן. $G=A\times B$ ו $H=A\times\{e\}$.
4. $G=\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ ו $H=\operatorname{SL}_n(\mathbb{R})=\{A\in\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})\mid |A|=1\}$

שאלה 4.4 תהי G חבורה סופית ויהיו H,K שתי תתי חבורות כך ש

$$\gcd(|H|,|K|)=1$$

הוכיחו כי $H\cap K=\{e\}$.

שאלה 4.5 יהיו p,q ראשוניים שונים. תהי G תת חבורה מסדר pq. הוכיחו כי כל תתי החבורות של G הן ציקליות.

שאלה 4.6 לכל חבורה G יש לפחות 2 תתי חבורות "טריויאליות": G ו $\{e\}$. מצאו את כל החבורות G (סופיות או אינסופיות) שאלה תתי החבורות היחידות שלהן. במילים אחרות מצאו את כל החבורות שאין להם תתי חבורות לא טריויאליות.