

## תרגיל 6

1. תהא  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  נגדיר ה"ל

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

המוגדרת ע"י

$$T(B) = A \cdot B$$

מצא את המרחביים העצמיים של  $T$  והוכח כי  $T$  אינה לכסינה

2. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(א) הוכח כי לכל  $a$  מתקיים כי  $A$  לכסינה

(ב) עבור כל ערך  $a$  מצא מטריצה  $P_a$  הפיכה,  $D_a$  אלכסונית המקיימות

$$D_a = P_a^{-1} A P_a$$

3. עבור אילו ערכי  $a$  המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  אינה לכסינה?

(א) כאשר  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

(ב) כאשר  $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$

4. נגדיר את המטריצות הממשיות הבאות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) מה הפולינום האופייני ומה הפולינום המינמאלי של  $A$  ושל  $B$ ?

(ב) לכל אחת מהמטריצות - מצאו ע"ע. לכל ע"ע מצאו את המרחב העצמי שלו, את הר"א ואת הר"ג. הסיקו האם המטריצה לכסינה.

(ג) האם  $A, B$  דומות?

5. מצא פולינום מינימאלי למטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} \quad (\text{א})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{3 \times 3} \quad (\text{ב})$$

6. היעזרו במשפט קילי המיליטון לענות על השאלות הבאות:

(א) תהא  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  הפיכה. הוכיחו כי קיים פולינום ממעלה קטנה שווה ל  $n - 1$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

המקיים

$$A^{-1} = p(A)$$

(ב) חשב את את  $A^{-2}, A^{12}$  עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**בהצלחה!**