טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 7

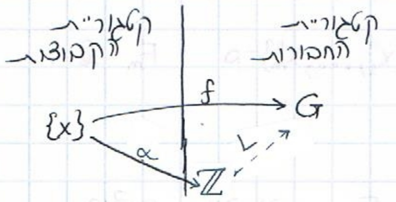
שאלה 1

מהי החבורה F_1?

פתרון:

נוכיח כי $F_1 \cong \mathbb{Z}$.

נראה ש-$\mathbb{Z}$ מקיימת את התכונה האוניברסלית של F_1.



תהי $\{x\}$ קבוצה בת איבר אחד.

נגדיר $\alpha:\{x\}\longrightarrow\mathbb{Z}$ ע"י $\alpha(x)=1$.

תהי G חבורה, ותהי $f:\{x\}\longrightarrow G$ פונקציה.

נגדיר $L:\mathbb{Z}\longrightarrow G$ ע"י $L(n):=(f(x))^n$.

נוכיח ש-L הומומורפיזם: $L(m+n)=(f(x))^{m+n}=(f(x))^m(f(x))^n=L(m)\cdot L(n)$.

כמו כן, $L\circ\alpha=f \Leftarrow (L\circ\alpha)(x)=L(\alpha(x))=L(1)=f(x)$.

נניח כי $L':\mathbb{Z}\longrightarrow G$ הומומורפיזם אחר שעבורו $L'\circ\alpha=f$. בהכרח

$$L'(1)=L'(\alpha(x))=f(x)$$

לכל $n\in\mathbb{Z}$, $L'(n)=L'(\underset{\text{כפולה}}{n\cdot 1})=(L'(1))^n=(f(x))^n=L(n)$

ולכן L יחיד.

בסך הכל, $\mathbb{Z}$ מקיימת את התכונה האוניברסלית של F_1, ולכן $F_1\cong\mathbb{Z}$.

שאלה 2

הראה ש- $F_n * F_m \cong F_{n+m}$.

__הוכחה:__

נראה ש- F_{n+m} מקיימת את התכונה האוניברסלית של $F_n * F_m$.

לצורך הפשטות, נסמן את היוצרים של F_n ב- $\{x'_1,\dots,x'_n\}$ ואת היוצרים של F_m ב- $\{x''_1,\dots,x''_m\}$.

$$\begin{tikzcd}
F_n \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "g"] & & \\
& F_{n+m} \arrow[r, dashed, "L"] & G \\
F_m \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

רוצים להגדיר $i: F_n \to F_{n+m}$ ו- $j: F_m \to F_{n+m}$; לפי התכונה האוניברסלית של F_n ושל F_m, מספיק להגדיר על קבוצת היוצרים.

נגדיר $i(x'_k) = x_k$ ו- $j(x''_k) = x_{n+k}$. לכן קיימים הומומורפיזמים יחידים i ו- j כנ"ל. נראה כי הם הדרושים.

תהי G חבורה, ויהיו $g: F_n \to G$, $h: F_m \to G$ הומומורפיזמים.

מחפשים הומומורפיזם $L: F_{n+m} \to G$. לפי התכונה האוניברסלית של החבורה החופשית, מספיק להגדיר את L על קבוצת היוצרים.

לכן, קיים הומומורפיזם יחיד $L: F_{n+m} \to G$ המקיים $L(x_k) = \begin{cases} g(x'_k), & 1 \le k \le n \\ h(x''_{k-n}), & n+1 \le k \le n+m \end{cases}$.

נבדוק על קבוצת היוצרים כי $L \circ i = g$ וכי $L \circ j = h$ (באופן דומה):

$$L(i(x'_k)) = L(x_k) = g(x'_k) \implies L \circ i = g$$

בסך הכל, F_{n+m} מקיים את התכונה האוניברסלית של $F_n * F_m$,

ולכן $F_n * F_m \cong F_{n+m}$.