<u>תרגיל בית 4</u>

1. תנו דוגמא לפונקציה f שאינה מדידה לבג אבל $|f|$ כן מדידה לבג.

פתרון: ניקח את $f=1_E-1_{E^c}$ כאשר E הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס. ברור כי f איננה מדידה שכן $f^{-1}(1)=E$ וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי $|f|=1$ זו כמובן פונקצית אינדיקטור שניתן לרשום $f=1_{\mathbb{R}}$ וזו כמובן קבוצה מדידה.

2. תהי $\{A_i\}$ סדרה של קבוצות זרות במרחב מדיד (X,S).

   i. יהיו $\{g_i\}_{i\geq 1}$ סדרה של פונקציות על X המדידות S. הראו כי $\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}g_i$ מתכנסת ומדידה S.

   ii. נניח כי $\bigcup_n A_n=X$. תהי $\mathscr{G}=\sigma(\{A_i: i\geq 1\})$ ופונקציה $h:X\to\mathbb{R}$. הראו כי h מדידה אמ"מ h קבועה על כל A_i.

פתרון:

i. נסמן ב $G_M(x)=\sum_{i=1}^{M}1_{A_i}(x)g_i(x)$. לכל $x\in X$ או ש $x\in A_i$ עבור איזשהו i או ש $x\notin A_i$ לכל i. אם $x\in A_i$ עבור איזשהו i אזי, כיוון ש A_i זרות, נובע כי $G_M(x)=g_i(x)$ לכל $M\geq i$ ומכאן ש $\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}(x)g_i(x)=g_i(x)$. אם $x\notin A_i$ לכל i, אזי נובע כי $G_M(x)=0$ לכל M ומכאן ש $\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}(x)g_i(x)=0$. נסמן $\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}(x)g_i(x)=G(x)$, על מנת להראות כי G הינה פונקציה מדידה נשים לב כי כיוון ש A_i זרות נובע כי אם $\alpha<0$ אז $G^{-1}((-\infty,\alpha])=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[A_i\cap g_i^{-1}((-\infty,\alpha])\right]$ אחרת $G^{-1}((-\infty,\alpha])=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i^c\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[A_i\cap g_i^{-1}((-\infty,\alpha])\right]$. בכל אופן G מדידה.

ii. $\Rightarrow$: אם h קבועה על כל A_i ב c_i את הערך של h על A_i. וברור כי $h=\sum_{i=1}^{\infty}1_{A_i}(x)c_i$ הינה מדידה עפ"י הסעיף הראשון.

$\Leftarrow$: לא קשה להראות(בידקו תכונות) כי מכיוון ש A_i זרות ואיחודן הוא כל X אזי משפחת הקבוצות $C=\{E \mid E=\bigcup_{i\in J} A_i, J\subseteq \mathbb{N}\}$ הינה סיגמא אלגברה המכילה את A_i ולכן $\mathscr{G}\subseteq C$. אם h איננה קבועה על איזשהו A_i אזי היא מקבלת לפחות 2 ערכים שונים על A_i , נניח שאחד מהם הוא y , אזי $D=h^{-1}(y)\cap A_i\subset A_i$ (מוכל ממש).
מכיוון ש D מוכלת ממש ב A_i נובע כי $D\notin C$ ומכאן ש $h^{-1}(y)$ איננה מדידה $\mathscr{G}$.

3. יהי מרחב מדיד (X,S) ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות f_1, f_2 ו f_3 ($f_i : X\to\mathbb{R}$ ($i=1,2,3$)). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2+f_2(x)t+f_3(x)=0$$

זוהי משוואה ריבועית ב t לכל $x\in X$.

הראו כי $A\equiv\{x\in X : \textit{the equation has two distinct roots}\}$ הינה מדידה S .

פתרון: נשים לב כי $A=\{x\in X : f_2{}^2-4f_1f_3>0\}$. ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל וחיבור ולכן $f_2{}^2-4f_1f$ הינה פונקציה מדידה S ומכאן ש $f_2{}^2-4f_1f>0$ הינה קבוצה מדידה S .

4. יהי מרחב מדיד (X,S) ויהיו f,g פונקציות מדידות S המקבלות ערכים ב $\mathbb{R}$. הראו כי הפונקציה $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}1_{(g(x)\neq 0)}$ הינה מדידה S .

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha<0$, אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$h^{-1}((-\infty,\alpha))=\{x\in X \mid \frac{f(x)}{g(x)}<\alpha\}$$
$$=\{x\in X \mid f(x)<g(x)\alpha\}\cap\{g(x)>0\}\cup\{x\in X \mid f(x)>g(x)\alpha\}\cap\{g(x)<0\}$$
$$=\{x\in X \mid f(x)-g(x)\alpha<0\}\cap\{g(x)>0\}\cup\{x\in X \mid f(x)-g(x)\alpha>0\}\cap\{g(x)<0\}$$

מכיוון שהפונקציה $f-\alpha g$ הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש h מדידה.