הנדסה מד"ר תשעח מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = y + \frac{1}{x}(1-y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

פתרון: נסדר

$$y' = y + \frac{1}{x}(1-y)$$

$$y' = y\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$$

$$y' + y\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$$

וקיבלנו מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = \frac{1}{x} - 1, b(x) = \frac{1}{x}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. למשל נבחר $A(x) = \ln(x) - x$ (בלי ערך מוחלט כי מחפשים פתרון סביב $x = 1$ שהוא חיובי) ואז

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x - \ln(x)}\left(C + \int \frac{1}{x}e^{\ln(x) - x}\mathrm{dx}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}\left(C + \int \frac{1}{x}xe^{-x}\mathrm{dx}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}\left(C - e^{-x}\right) \\ &= \frac{e^x}{x}C - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה.

$$2 = y(1) = e \cdot C - 1$$

לכן $C=\frac{3}{e}$. התשובה הסופית היא

$$.y(x)=\frac{3}{e}\cdot\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\frac{x^2+e^x}{2x+e^x}y'=-y$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$.

פתרון: נסדר

$$\frac{x^2+e^x}{2x+e^x}y'=-y$$

$$\frac{y'}{-y}=\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{-y}=\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו.

$$-\ln|y|=\int\frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\mathrm{dx}=\ln\left(x^2+e^x\right)+C$$

ולכן $\frac{1}{|y|}=\left(x^2+e^x\right)e^C$ ולכן $|y|=\frac{1}{(x^2+e^x)e^C}$ ולכן

$$.y=\pm\frac{1}{(x^2+e^x)\,e^C}$$

נציב תנאי התחלה

$$1=y(0)=\pm\frac{1}{e^C}$$

ונגלה שצריך לקחת את הפתרון עם הפלוס. ומכאן ש $1=\frac{1}{e^C}$ ולכן $C=0$. סה"כ הפתרון לתרגיל

$$.y=\frac{1}{x^2+e^x}$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''=2x\left(y'\right)^2$ המקיים $y(0)=0,y'(0)=-1$.

פתרון: נציב $z = y'$ ונסדר

$$z' = 2xz^2$$

$$\frac{z'}{z^2} = 2x$$

$$\frac{\mathrm{dz}}{z^2} = 2x\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו.

$$-\frac{1}{z} = x^2 + C$$

ולכן $y' = z = -\frac{1}{x^2+C}$. נציב תנאי התחלה

$$-1 = y'(0) = -\frac{1}{C}$$

מכאן ש $C = 1$ ונקבל ש

$$y' = -\frac{1}{x^2+1}.$$

לכן

$$y = \int z = -\arctan(x) + D$$

ונציב את תנאי ההתחלה השני

$$0 = y(0) = D$$

לכן התשובה הסופית היא

$$y(x) = -\arctan(x).$$

4. מצאו פתרון למד"ר $y'' = y + e^x$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1},\qquad\qquad y''=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$xy''-\left(1+x\right)y'+2y=xy''-y'-xy'+2y$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}\left(k+1\right)kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}\left(k+1\right)x^k-\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k+2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$

$$=-a_1+2a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{k+1}\left(k+1\right)k-a_{k+1}\left(k+1\right)-a_kk+2a_k\right]x^k$$

ומשווים לאפס. לכן $-a_1+2a_0=0$ ($a_1=2a_0$) ולכל $k\geq 1$ מתקיים

$$a_{k+1}\left(k+1\right)k-a_{k+1}\left(k+1\right)-a_kk+2a_k=0$$

$$a_{k+1}\left(k+1\right)\left(k-1\right)-a_k(k-2)=0$$

ועבור $k=1$ נקבל $a_1=0$ (ולכן גם $a_0=0$) ולכל $k\geq 2$ נקבל

$$a_{k+1}=\frac{a_k(k-2)}{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}$$

כלומר, $a_0=a_1=0$, את a_2 נוכל לבחור כרצוננו ולכל $k\geq 2$ מתקיים

$$a_{k+1}=\frac{a_k(k-2)}{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}$$

מה שמכריח את $a_3=0$ (בהצבה $k=2$) וכן את כל הבאים אחריו. נבחר $a_2=1$ נקבל את הפתרון $y(x)=x^2$. בנוסף $y(x)=x^2$

מקיים $y(0)=0, y(1)=1$ ולכן הוא הפתרון לתרגיל.

5. ידוע כי קיים פתרון למד"ר $x^2y''=\left(x^2-2x+2\right)y+x-2$ מהצורה $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. עבור פתרון זה:

(א) מצאו את $y(0), y'(0)$.

פתרון: נציג את המד"ר כ

$$x^2y''-\left(x^2-2x+2\right)y=x-2$$

ונסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1}, \qquad y''=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$x^2y''-\left(x^2-2x+2\right)y=x^2y''-x^2y+2xy-2y$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}2a_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}2a_kx^k=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^k-\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}2a_{k-1}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}2a_kx^k=$$

$$=\left(2a_0x-2a_0-2a_1x\right)+\sum_{k=2}^{\infty}\left[a_kk\left(k-1\right)-a_{k-2}+2a_{k-1}-2a_k\right]x^k$$

ומשווים ל $x-2$. לכן

$$2a_0-2a_1=1 \qquad -2a_0=-2$$

לכן $a_0=1$ ו $a_1=\frac{2a_0-1}{2}=\frac{1}{2}$) ולכל $k\geq 2$ מתקיים

$$a_kk\left(k-1\right)-a_{k-2}+2a_{k-1}-2a_k=0$$

$$a_k\left[k\left(k-1\right)-2\right]=a_{k-2}-2a_{k-1}$$

ולכן מצאנו את הפתרון כיוון ש $y(0)=a_0=1$ ו $y'(0)=a_1=\frac{1}{2}$.

נתון בנוסף כי $y''(0)=\frac{1}{3}$:

(ב) מצאו את y.

פתרון: ראינו כי $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ מקיים: $a_0=1$ ו $a_1=\frac{1}{2}$ ולכל $k\geq 2$ מתקיים

$$a_k\left[k\left(k-1\right)-2\right]=a_{k-2}-2a_{k-1}$$

וכעת נתון ש $y''(0)=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)0^{k-2}=2a_2$ שווה ל $\frac{1}{3}$ לכן $a_2=\frac{1}{3!}$. נמשיך להציב kים: עבור $k=2$ נקבל $a_2\cdot 0=0$. לכל $k\geq 3$ נקבל ש

$$a_k\left[k^2-k-2\right]=a_{k-2}-2a_{k-1}$$

$$a_k\left[\left(k+1\right)\left(k-2\right)\right]=a_{k-2}-2a_{k-1}$$

$$a_k=\frac{a_{k-2}-2a_{k-1}}{\left(k+1\right)\left(k-2\right)}$$

ונמשיך להציב $k\geq 3$:

$$a_3=\frac{a_1-2a_2}{4\cdot 1}=\frac{\frac{1}{2}-2\frac{1}{3!}}{4}=\frac{\frac{3-2}{3!}}{4}=\frac{1}{4!}$$

$$a_4=\frac{\frac{1}{3!}-2\frac{1}{4!}}{5\cdot 2}=\frac{\frac{2}{4!}}{5\cdot 2}=\frac{1}{5!}$$

ואפשר להוכיח כי לכל k מתקיים

$$a_k=\frac{1}{(k+1)!}$$

ולכן

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}x^k=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}=$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(e^x - 1 \right)$$

(ג) הביעו את y במפורש באמצעות פונקציות סטנדרטיות.

פתרון: כמו שסיימנו את הסעיף הקודם $y(x) = \frac{1}{x} \left(e^x - 1 \right)$.