תרגיל בית 2

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.

ב. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n, הראו כי $m(B) > \delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(B) = 0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ אבל $m(B) = 0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן $E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$ נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ וגם מתקיים כי $m(E_1) \le 1$ שכן $E_1 \subseteq [0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} m(A_k) \ge \delta$$

ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ נובע כי $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$. מהסעיף הקודם נובע כי $m(B) \le \lim_{k\to\infty} m(A_k)$ ומכאן ש $m(B) = 0$.

ד. ניקח את $A_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)},\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n+1)}\right)$. קל לראות כי $m(A_n)=\frac{1}{(n+1)}$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=\infty$. מצד שני $E_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n=A_k$ ולכן

$$m(B)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=0.$$

2. יהי $\varepsilon>0$, תהי m מידת לבג, ונניח כי A הינה קבוצת בורל ב $\mathbb{R}$. הוכח כי אם מתקיים

$$m(A\cap I)\le(1-\varepsilon)m(I)$$

לכל אינטרוול I אזי $m(A)=0$.

פתרון: נניח תחילה כי $m(A)<\infty$. אזי עפ"י ההגדרה של המידה החיצונית m^* (שמסכימה עם m לכל קבוצה מדידה בורל) קיימת קבוצה פתוחה O כך ש $A\subset O$ ו $m(O)<\infty$. ניתן לרשום $O=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר I_n קטעים זרים ופתוחים. נקבל כי

$$m(A\cap O)=m\left(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap I_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A\cap I_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}m(A\cap I_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon)m(A\cap I_n)=(1-\varepsilon)m(A\cap O)$$

מכאן נובע כי $m(A\cap O)=0$ ולכן $m(A)=0$.

עבור המקרה בו $m(A)=\infty$ נתסתכל על $A_i=A\cap[i-1,i]$ עבור $i\in\mathbb{Z}$. ברור כי מתקיים

$$m(A_i\cap I)\le m(A\cap I)\le(1-\varepsilon)m(I)$$

לכל אינטוול I.עפ"י המקרה הקודם נובע כי $m(A_i)=0$. מכאן ש

$$m(A)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap[i-1,i]\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=0$$

מש"ל

3. הגדרה: נאמר שקבוצה $G\subseteq\mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G\in G_\delta$ המקיימת $E\subseteq G$ וכן $m^*(G)=m^*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E\subseteq O$ וכן

$$m^*(O)<m^*(E)+\varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

א. פתרון: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה O כך ש $m^*(O)<m^*(E)+\varepsilon$.
מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם מכסה את E נקבל כי קיימים קטעים $\{I_k\}$ המכסים את E כך ש $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)<m^*(E)+\varepsilon$

. מכאן שאם נסמן $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k=O$, נקבל כי O הינה קבוצה פתוחה המקיימת

$m^*(O)\le\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)<m^*(E)+\varepsilon$. נבנה סדרה של קבוצות פתוחות $\{O'_m\}$ כך ש

$m^*(O'_m)<m^*(E)+\frac{1}{m}$. נסמן $O=\bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$. זוהי קבוצה ב G_δ . מהמונטוניות של המידה נקבל

ב. $\forall m\in\mathbb{N}\quad m^*(E)\le m^*(O)=m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} O_m\right)<m^*(E)+\frac{1}{m}$. נשאיף לאינסוף ונקבל את הפתרון.

4. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A\in\sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D}\subseteq\mathcal{E}$ כך ש $A\in\sigma(\mathfrak{D})$.

הדרכה:

א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.

ב. הראו כי הקבוצות ב $\mathcal{E}$ מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש

פתרון:

א. נסמן ב $\mathcal{S}$ קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי $\mathcal{S}$ הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E\in\mathcal{E}$, ברור כי $X\in\sigma(E)$ ומכאן ש $X\in S$.

ii. אם $A\in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n\in\mathcal{E}$ וגם $A\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ מכאן ש $A^c\in\sigma(E_n,n\in\mathbb{N})$ ולכן $A^c\in S$.

iii. תהי $A_n \in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\left\{E_n^k\right\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n \in \mathcal{E}$ וגם $A_n \in \sigma\left(E_k^n, k \in \mathbb{N}\right)$. קל לראות כי אז $\left\{E_k^n\right\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma\left(E_k^n, n, k \in \mathbb{N}\right)$ ולכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$.

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma\left(E\right)$ ולכן $E \in S$. מכאן נובע כי $\sigma\left(E\right) \subseteq S$ וסיימנו.