תרגיל בית 2

1. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x -ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.

א. הראו כי B הינה מדידה לבג.

ב. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n, הראו כי $m(B) > \delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(B) = 0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ אבל $m(B) = 0$.

פתרון:

א. נשים לב כי ניתן לכתוב את B בצורה הבאה:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

במילים, אנו רוצים את כל ה x -ים אשר נמצאים בכל זנב של הסדרה $\{A_n\}$. ראינו בהרצאה כי הקבוצות המדידות הינן סיגמא- אלגברה ולכן סגורות לחיתוך ואיחוד בן מנייה. מכאן שאם נסמן $E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$ נקבל שהסדרה $\{E_k\}$ הינה סדרה של קבוצות מדידות ולכן הקבוצה B הינה מדידה שכחיתוך של מדידות.

ב. נשים לב כי $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ וגם מתקיים כי $m(E_1) \le 1$ שכן $E_1 \subseteq [0,1]$. ראינו כי מידה הינה "רציפה" ומכאן ש

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n\right)$$
$$\ge \lim_{k\to\infty} m(A_k) \ge \delta$$

ג. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ נובע כי $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$. מהסעיף הקודם נובע כי $m(B) \le \lim_{k\to\infty} m(A_k)$ ומכאן ש $m(B) = 0$.

ד. ניקח את $A_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$. קל לראות כי $m(A_n) = \frac{1}{(n+1)}$ וכי

$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$. מצד שני $E_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n = A_k$ ולכן

$$m(B) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = m\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = 0 .$$

2. יהי $\varepsilon > 0$, תהי m מידת לבג, ונניח כי A הינה קבוצת בורל ב $\mathbb{R}$. הוכח כי אם מתקיים

$$m(A \cap I) \le (1-\varepsilon) m(I)$$

לכל אינטרוול I אזי $m(A) = 0$.

פתרון: נניח תחילה כי $m(A) < \infty$. אזי עפ"י ההגדרה של המידה החיצונית m^* (שמסכימה עם m לכל קבוצה מדידה בורל) קיימת קבוצה פתוחה O כך ש $A \subset O$ ו $m(O) < \infty$. ניתן לרשום $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר I_n קטעים זרים ופתוחים. נקבל כי

$$m(A \cap O) = m\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap I_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap I_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon) m(A \cap I_n) = (1-\varepsilon) m(A \cap O)$$

מכאן נובע כי $m(A \cap O) = 0$ ולכן $m(A) = 0$.

עבור המקרה בו $m(A) = \infty$ נתסתכל על $A_i = A \cap [i-1, i]$ עבור $i \in \mathbb{Z}$. ברור כי מתקיים

$$m(A_i \cap I) \le m(A \cap I) \le (1-\varepsilon) m(I)$$

לכל אינטוול I.עפ"י המקרה הקודם נובע כי $m(A_i) = 0$. מכאן ש

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap [i-1, i]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0$$

מש"ל

3. הגדרה: נאמר שקבוצה $G \subseteq \mathbb{R}$ היא מטיפוס G_δ אם ניתן להציג אותה כחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ הוכיחו שקיימת קבוצה $G \in G_\delta$ המקיימת $E \subseteq G$ וכן $m^*(G) = m^*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

א. הוכיחו שלכל קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה פתוחה O , המקיימת $E \subseteq O$ וכן

$$m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$$

ב. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

א. פתרון: תהי $E \subseteq \mathbb{R}$. עפ"י ההדרכה, נמצא קבוצה פתוחה O כך ש $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$.
מכיוון שהמידה החיצונית של קבוצה הינה האינפימום על סכום של אורך של קטעים שאיחודם מכסה את E נקבל כי קיימים קטעים $\{I_k\}$ המכסים את E כך ש $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$

. מכאן שאם נסמן $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = O$, נקבל כי O הינה קבוצה פתוחה המקיימת

$m^*(O) \le \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) < m^*(E) + \varepsilon$. נבנה סדרה של קבוצות פתוחות $\{O'_m\}$ כך ש

$m^*(O'_m) < m^*(E) + \frac{1}{m}$. נסמן $O = \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$. זוהי קבוצה ב G_δ . מהמונוטוניות של המידה נקבל

ב. $\forall m \in \mathbb{N} \quad m^*(E) \le m^*(O) = m^*\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} O_m\right) < m^*(E) + \frac{1}{m}$. נשאיף לאינסוף ונקבל את הפתרון.

4. תהי $\mathcal{E}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב X . הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathcal{E})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{E}$ כך ש $A \in \sigma(\mathfrak{D})$.

הדרכה:

א. הראו כי קבוצת הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את תכונה זו הינה סיגמא אלגברה.

ב. הראו כי הקבוצות ב $\mathcal{E}$ מקיימות את תכונה זו והסיקו את הנדרש

פתרון:

א. נסמן ב $\mathcal{S}$ קבוצת כל הקבוצות ב $\sigma(\mathcal{E})$ המקיימות את התכונה ונראה כי $\mathcal{S}$ הינה סיגמא אלגברה:

i. ניקח $E \in \mathcal{E}$, ברור כי $X \in \sigma(E)$ ומכאן ש $X \in S$.

ii. אם $A \in S$ אזי נובע כי קיימת סדרה $\{E_n\}$ כך ש $E_n \in \mathcal{E}$ וגם $A \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ מכאן ש $A^c \in \sigma(E_n, n \in \mathbb{N})$ ולכן $A^c \in S$.

iii. תהי $A_n \in S$. נובע כי לכל n קיימת סדרה $\left\{E_n^k\right\}$ של קבוצות כך ש $E_k^n \in \mathcal{E}$ וגם $A_n \in \sigma\left(E_k^n, k \in \mathbb{N}\right)$. קל לראות כי אז $\left\{E_k^n\right\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ הינה בת מנייה וכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma\left(E_k^n, n, k \in \mathbb{N}\right)$ ולכן $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in S$.

מכאן ש S הינה סיגמא אלגברה.

ב. ברור כי לכל $E \in \mathcal{E}$ מתקיים כי $E \in \sigma\left(E\right)$ ולכן $E \in S$. מכאן נובע כי $\sigma\left(E\right) \subseteq S$ וסיימנו.