

## תרגיל 5

1. יהא  $X$  מ"ט ו  $A$  תמ"ט. הוכיחו כי סגורה  $S$  כי סגורה  $S'$  ב  $A$  אם קיימת סגורה  $S'$  ב  $X$  כך ש  $S = A \cap S'$ .

פתרון:

תהא  $S$  סגורה ב  $A$  אזי  $A \setminus S$  פתוחה ב  $A$ . לכן קיימת  $O$  פתוחה ב  $X$  כך ש  $A \setminus S = A \cap O$  נגדיר  $S' = X \setminus O$  סגורה ב  $X$  והיא תקיים

$$A = A \cap X = A \cap (S' \cup O) = (A \cap S') \cup (A \cap O) = (A \cap S') \cup (A \setminus S)$$

ולכן  $S = A \cap S'$ .

2. הוכיחו ש-  $(X, \tau_{cof})$  תמיד ספרבילית. בנוסף, מצאו מתי  $(X, \tau_{coc})$  ספרבילית. פתרון:

נראה שכל קבוצה בת מניה אינסופית צפופה ב- $X$ . אכן, תהי  $A \subseteq X$  אינסופית בת מניה. אנחנו טוענים ש- $cl(A) = X$ . אכן, יהי  $x \in X$  ותהי  $U \in \tau_{cof}$  סביבה של  $x$ . לפי הגדרה,  $|U^c| < \infty$  ולכן  $A \not\subseteq U^c$  כי אחרת

$$\aleph_0 = |A| \leq |U^c| < \infty$$

מה שלא אפשרי. מכאן,  $A \cap U \neq \emptyset$ . זה נכון לכל  $x \in X$  וכל סביבה  $U$  של  $x$  ולכן  $A$  צפופה לפי הגדרה.

מנגד,  $(X, \tau_{coc})$  ספרבילית אם ורק אם  $X$  בת מניה. יותר מזה, אם  $X$  לא בת מניה אז קל לראות שכל תת קבוצה בת מניה שלה היא סגורה (כי המשלים שלה פתוח לפי הגדרה).

3. תהי  $(P, <)$  קבוצה סדורה לינארית עם טופולוגיית הסדר. הוכיחו את משפט הסנדוויץ: אם  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P$  סדרות כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$$

וגם

$$L := \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} z_n$$

אז מתקיים ש- $\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = L$ .

בנוסף: נסחו טענה דומה על רציפות פונקציות והוכיחו אותה. פתרון:

תהי  $L \in U \in \tau_{<}$  סביבה. לפי הגדרה, קיימים  $a < L < b$  כך ש- $(a, b) \subseteq U$ . מכיוון ש- $L := \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} z_n$ , קיימים  $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$  כך ש

$$\forall n_0 \leq n \in \mathbb{N} : x_n \in (a, b),$$

$$\forall m_0 \leq m \in \mathbb{N} : z_n \in (a, b)$$

נגדיר  $t_0 := \min\{n_0, m_0\}$ . לכל  $t_0 \leq t \in \mathbb{N}$  מתקיים ש- $n_0, m_0 \geq t$  ולכן מכאן קל לראות ש- $x_t, z_t \in (a, b)$

$$y_t \geq x_t > a, \quad y_t \leq z_t < b$$

לפי הגדרה,  $y_t \in (a, b)$  ולכן  $\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = L$  כדרוש.

בנוסף: יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי ו- $(P, <)$  קבוצה לינארית עם טופולוגיית הסדר. נניח ש- $f, g, h : X \rightarrow P$  כך ש- $f \leq g \leq h$ . לבסוף נניח בנוסף ש- $f(x_0) = h(x_0)$  וש- $f, h$  רציפות ב- $x_0$ . הוכיחו שגם  $g$  רציפה ב- $x_0$ .

הוכחת הבנוסף: תהי  $x_0 \in U \in \tau_{<}$ . לפי הגדרה, קיימים  $a < x_0 < b$  כך ש- $(a, b) \subseteq U$ . מכיוון ש- $f, h$  רציפות ב- $x_0$ , קיימות  $V_1, V_2 \in \tau$  כך ש- $f(V_1), h(V_2) \subseteq (a, b)$ . נגדיר כעת  $V := V_1 \cap V_2$ . אם  $y \in V$ , אז  $f(y), h(y) \in (a, b)$  ולכן

$$g(y) \leq h(y) < b, \quad g(y) \geq f(y) > a$$

ולכן  $g(y) \in (a, b)$ . זה נכון לכל  $y \in V$ , כלומר  $g(V) \subseteq (a, b)$ . לפי הגדרה,  $g$  רציפה ב- $x_0$ .

4. יהיו  $(X, d)$  ו- $(Y, \rho)$  שני מרחבים מטריים ותהיה  $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  פונקציה על. נניח גם שקיימים  $M \in \mathbb{R}^{>0}$  כך ש-

$$\forall x, y \in X : md(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq Md(x, y)$$

הוכיחו ש- $f$  היא הומאומורפיזם.

פתרון:

ראשית, קל לראות ש- $f$  היא חח"ע, כי אם  $x, y \in X$  ו- $f(x) = f(y)$  אז מתקיים

$$d(x, y) \leq \frac{1}{m} \rho(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$$

לכן,  $f$  היא הפיכה. בנוסף, קל לראות ש- $f$  היא ליפשיץ עם מקדם  $M$ . אנחנו טוענים ש- $f^{-1}$  היא ליפשיץ גם כן עם מקדם  $\frac{1}{m}$ . יהיו  $\alpha, \beta \in Y$  ונניח ש- $f(x) = \alpha, f(y) = \beta$ . נתון ש-

$$md(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)) = md(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) = \rho(\alpha, \beta) \Rightarrow$$

$$d(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)) \leq \frac{1}{m} \rho(\alpha, \beta)$$

אנחנו יודעים שפונקציות ליפשיץ הן רציפות ולכן הראנו ש- $f^{-1}$  הן רציפות, כרצוי.

5. תהא  $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{2\}\}$  טופולוגיה על  $\mathbb{R}$ . נגדיר  $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$  שמוגדרת על ידי  $f(x) = 2x$ . מצאו באלו נקודות רציפה. פתרון:

עבור כל  $y \neq 2$ , הסביבה היחידה של  $y$  היא  $\mathbb{R}$  ולכן הפונקציה רציפה בהן. עבור  $y = 2$  ישנה גם  $U = \{2\}$  ומתקיים  $\tau \ni \{1\} \notin f^{-1}(U)$ . לכן הפונקציה רציפה בכל נקודה חוץ מ-2.

6. מצאו  $\tau$  על  $\mathbb{R}$  כך שחיבור של רציפות  $f, g : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$  אינה רציפה. פתרון:

בטופולוגיה של הסעיף הקודם, אפשר להסתכל על  $f(x) := x$  (כלומר, פונקציית הזהות).

7. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי, ותהי  $A \subseteq X$ . נגדיר את  $1_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  לפי

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(א) הוכיחו ש- $\partial(A) = \text{int}(A) \cup \text{int}(A^c)$

(ב) הוכיחו ש- $1_A$  רציפה בדיוק ב- $\partial(A)$

(ג) הסיקו ש- $1_A$  רציפה אם ורק אם  $A$  היא סגורה.

פתרון:

ראשית נראה שאכן

$$X \setminus \partial(A) = \text{int}(A) \cup \text{int}(A^c)$$

קל לראות ש-

$$X \setminus \partial(A) = (A \setminus \partial(A)) \cup (A^c \setminus \partial(A))$$

ראינו בהרצאה ש- $\text{int}(A) = A \setminus \partial(A)$  ולכן גם  $\text{int}(A^c) = A^c \setminus \partial(A)$ , מה שמסיים את ההוכחה. נוכיח את הפרט הזה שוב לנוחות הקורא. לפי הגדרת השפה, מתקיים

$$A \setminus \partial(A) = A \setminus (\bar{A} \setminus A^\circ) = (A \setminus \bar{A}) \cup A^\circ = A^\circ$$

שימו לב שהשיויון האחרון מתקיים כי  $A \subseteq \bar{A}$  והאחד שלפניו בזכות זה ש- $A^\circ \subseteq \bar{A}^\circ$ . כעת, נראה ש- $1_A$  אכן רציפה ב- $A^\circ$  וגם ב- $(A^c)^\circ$ . יהי  $x \in A^\circ$ . נשים לב ש- $A^\circ$  היא פתוחה ולכן מהווה סביבה פתוחה של  $x$ . בנוסף,  $A^\circ \subseteq A$  ולכן  $1_A(A^\circ) \equiv \{1\}$ . הסביבה המינימלית של  $1 \in \text{Im}(1_A)$  היא  $\{1\}$  וקל לראות ש-

$$x \in A^\circ \subseteq 1_A^{-1}(\{1\})$$

הטיעון ל- $(A^c)^\circ$  דומה ולכן  $1_A$  רציפה על  $\text{int}(A) \cup \text{int}(A^c)$ . נגד, נניח ש- $x \in X \setminus \partial(A)$ . נסתכל על הסביבה  $U := \{1_A(x)\}$ . לפי תכונות פונקציה רציפה, מתקיים ש- $1_A^{-1}(U)$  קבוצה פתוחה שמכילה את

$x$ . בנוסף,  $1_A^{-1}(U) \subseteq A$  או  $1_A^{-1}(U) \subseteq A^c$ . מכיוון שהפנים הוא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר בתוך קבוצה נתונה, מתקיים ש- $1_A^{-1}(U) \subseteq A^\circ$  או  $1_A^{-1}(U) \subseteq (A^c)^\circ$ . כרצוי.  
לבסוף, כתוצאה מהסעיף הקודם ברור ש- $1_A$  רציפה אם ורק אם  $\partial(A) = \emptyset$ .  
כלומר:

$$\partial(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \emptyset$$

ראינו בהרצאה ש- $\bar{A} \setminus A^\circ = \partial(A)$  ולכן בהכרח  $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ . לפי עוד תוצאה מההרצאה,  $A$  פתוחה וגם סגורה, כרצוי.

8. נניח ש- $(Q, <)$ ,  $(P, <)$  הן קבוצה סדורה לינארית ונסתכל על טופולוגיית הסדר. נניח בנוסף ש- $f: P \rightarrow Q$  הינה פונקציה מונוטונית.

(א) הוכיחו או הפריכו שקבוצת נקודות אי הרציפות של  $f$  היא דלילה.

(ב) האם תשובתכם תשתנה אם  $(Q, <) = ([0, 1], <)$ ?

פתרון:

הסעיף הראשון הוא הפרכה. נסתכל על  $(P, <) := ([0, 1], <)$  ועל  $(Q, <) := ([0, 1]^2, <_{lex})$ . נגדיר  $f(x) := (x, \frac{1}{2})$ . קל לראות ש- $f(P)$  דיסקרטית ב- $Q$  אבל התמונה ההפוכה שלה לא.

גם הסעיף השני הוא הפרכה, אפילו אפשר להגדיר  $(P, <) := ([0, 1], <)$ . תהי  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}$  מניה של המספרים הרציונלים. נגדיר

$$f(x) := \sum_{x_n \leq x} 2^{-n}$$

כלומר, הפונקציה מסתכלת על כל הרציונלים שקטנים או שווים מ- $x$ , ומחשבת את הסכום של  $\frac{1}{2}$  בחזקת האינדקס שלהם. קל לראות ש-

$$0 \leq f(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1$$

ולכן הפונקציה אכן מוגדרת לטווח הנתון. בנוסף, קל לראות שהיא לא רציפה משמאל עבור כל  $x$  רציונלי. לכן, קבוצת נקודות האי רציפות שלה מכילה את הרציונלים, שהם צפופים ובפרט לא דלילים.

9. יהיו  $X$  ו- $Y$  מרחבים טופולוגיים ויהיו  $\{C_i\}_{i=1}^n$  כיסוי סגור של  $X$ . נניח בנוסף ש- $f_i: C_i \rightarrow Y$  פונקציה רציפה יחסית לטופולוגיית תת המרחב. נניח לבסוף שהפונקציות קוהרנטיות, כלומר שלכל  $1 \leq i \neq j \leq n$  מתקיים  $f_i(x) = f_j(x)$  עבור  $x \in C_i \cap C_j$ . הוכיחו שהפונקציה  $f: X \rightarrow Y$  שמוגדרת ע"י

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & x \in C_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in C_n \end{cases}$$

היא רציפה (אין צורך להראות שהיא מוגדרת היטב). הראו גם שאם  $C_i$  לא סגורות אז הטענה לא נכונה.

הערה: הטענה נכונה גם כשמדובר על קבוצות פתוחות.  
 הערה 2: זוכרים את פונקציית קולץ מהתרגול השני? הפונקציה  $f : (\mathbb{Z}, d_2) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_2)$  שמוגדרת ע"י:

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in 2\mathbb{Z} \\ 3n + 1 & n \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

עכשיו ברור שהיא רציפה.

פתרון:

לפי משפט קריטריון הרציפות מההרצאה, מספיק להראות שהתמונה ההפוכה של כל קבוצה סגורה היא סגורה. תהי  $S \subseteq Y$  קבוצה סגורה. קל לראות ש-

$$f^{-1}(S) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(S)$$

מכיון ש- $f_i$  רציפות מ- $C_i$ , מתקיים ש- $f_i^{-1}(S)$  סגורה ב- $C_i$  לכל  $1 \leq i \leq n$ . לפי התרגיל הראשון בתרגול זה, קיימת קבוצה סגורה  $S'_i \subseteq X$  כך ש-

$$f_i^{-1}(S) = C_i \cap S'_i$$

שימו לב שמכיון ש- $C_i$  קבוצה סגורה ב- $X$ , כך גם  $f_i^{-1}(S)$  כחיתוך של קבוצות סגורות. לכן  $f^{-1}(S)$  קבוצה סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

כדי לראות דוגמה נגדית במקרה של קבוצות שאינן סגורות אפשר להסתכל על הפונקצייה האופיינית של הרציונלים בתוך הטבעיים  $1_{\mathbb{Q}}$  (ישנה הגדרה בתרגיל 7).

10. קבעו אם הקבוצות הבאות צפופות וגם אם הן דלילות

(א)  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  פתרון: ידוע ש- $\mathbb{Q}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$  ולכן היא אינה דלילה (כי  $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ).

(ב)  $A := \{f \in C[0, 1] \mid \exists \alpha > 0 \forall 0 \leq x \leq \alpha : f(x) = 0\} \subseteq C[0, 1]$  עם מטריקת  $d_1$ , כלומר קבוצת כל הפונקציות הרציפות שמתאפסות בסביבה של 0. פתרון: הקבוצה הזו צפופה ולכן לא דלילה. לכל פונקציה רציפה  $f$  אפשר למצוא חסם  $M > 0$  על  $[0, 1]$ . מכאן לכל  $\varepsilon > 0$  ניתן להגדיר

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2M} \\ \left(x - \frac{\varepsilon}{2M}\right) f\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) & \frac{\varepsilon}{2M} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{M} \in A \\ f(x) & \frac{\varepsilon}{M} \leq x \end{cases}$$

קל לראות שהפונקציה הזו רציפה לפי תרגיל 9. שימו לב שהקבוצה הזו אינה צפופה יחסית למטריקת  $d_\infty$ .

(ג)  $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n \times n}$  (כלומר קבוצת המטריצות ההפיכות) פתרון: הקבוצה הזו צפופה ולכן לא דלילה. נניח בשלילה שקיימת  $A$  לא הפיכה ו- $\varepsilon > 0$  כך ש- $B(A, \varepsilon)$  מכילה רק מטריצות סינגולריות (לא הפיכות). שימו לב שאנחנו מתייחסים למטריקת המקסימות  $d_1$  על האברים. בפרט, לכל  $\delta < \varepsilon$  מתקיים ש-

$$A_\delta := A - \delta I$$

גם היא לא הפיכה. זה אומר שהדטרמיננטה  $|A_\delta| = |A - \delta I| = 0$  לכל  $\delta < \varepsilon$ . אבל זה אומר שלפולינום האופייני של  $A_\delta$  יש אינסוף אפסים ולכן בהכרח  $p_A \equiv 0$ . מכאן ש־ $A = 0$ . ועם זאת במקרה זה  $A_\delta$  הפיכה לכל  $\delta > 0$ . הסתירה מוכיחה שקבוצת המטריצות ההפיכות אכן צפופה.

(ד)  $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n \times n}$  כלומר קבוצת המטריצות עם דטרמיננטה 1. פתרון: הקבוצה הזו סגורה ולכן לא צפופה (כי היא אינה המרחב כולו). מנגד, המימד שלה קטן מ־ $n \times n$  ולכן היא לא יכולה להכיל כדור פתוח ממימד  $n \times n$ . מכאן שהיא דלילה. אפשר לראות את זה באופן יותר פורמלי בעזרת טיעון מאוד דומה לזה של הסעיף הקודם (הפעם עם  $p_A \equiv 1$ ).

(ה)  $5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$  עם הטופולוגיה ה־3־אדית פתרון: כבר ראינו שהקבוצה הזו צפופה, ולכן לא דלילה.

(i) אתגרים

$$i. \left\{ \frac{a^n}{b^m} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{>0} \text{ עבור } a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

א'. רמז: משפט לינדמן־וירשטראס

ב'. רמז 2: משפט קרונקר

פתרון: הקבוצה הזו צפופה ולכן לא דלילה. הוכחה תעלה במסגרת הפתרון לחידה של השבוע.

$$ii. \mathbb{P} := \{q \in \mathbb{Z} \mid q \text{ is prime}\} \subseteq \mathbb{Z} \text{ עם הטופולוגיה ה־}p\text{-אדית.}$$

א'. רמז: משפט דריכלה

פתרון: הסגור של הקבוצה הזו הוא  $\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \cup \{p\}$  ולכן אינו צפוף ואינו דליל. הוכחה תעלה במסגרת הפתרון לחידה של השבוע.

11. השלימו את הטבלה הבאה:

ספרבילי	מרחב טופולוגי
רק אם המרחב בן מניה	המרחב הדיסקרטי
כן	הטופולוגיה הטריטוריאליית
כן	$\mathbb{R}^n$
כן	$[0, 1]$
כן	$(\mathbb{Z}, d_p)$
כן	$(\mathbb{Q}, d_p)$
כן	$(\mathbb{Z}, d_p)$
כן	$(\mathbb{Q}, d_p)$
כן	$l_1$
כן	$l_2$
לא	$l_\infty$
כן	$(C[0, 1], d_\infty)$
כן	$(C[0, 1], d_1)$
כן	$(\{a, b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$
כן	עבור $X$ אין סופי $(X, \tau_{\text{cof}})$
לא	עבור $X$ לא בן מניה $(X, \tau_{\text{coc}})$
לא	$([0, 1]^2, \langle l_{ex}, \tau_{\langle l_{ex}} \rangle)$

פתרון:

נוסיף קצת הסברים עבור כמה דברים לא טריטוריאליים:

- (א) הקבוצות  $(\mathbb{Z}, d_p)$  ו- $(\mathbb{Q}, d_p)$  בנות מניה ולכן ספרביליות.
- (ב) לכל מרחב מטרי  $(X, d)$  מתקיים ש- $X$  צפוף בהשלמה  $\bar{X}$  ולכן אם  $X$  ספרבילי (או בפרט בן מניה), כך גם  $\bar{X}$ . מכאן שגם  $(\bar{\mathbb{Z}}, d_p)$  ו- $(\bar{\mathbb{Q}}, d_p)$  ספרביליים.
- (ג)  $l_1$  ו- $l_2$  ספרביליים. אפשר להסתכל על תת הקבוצה של סדרות רציונליות מתאפסות לבסוף (נשאיר את זה כתרגיל בית לוודא שזו אכן קבוצה צפופה). שימו לב שזו קבוצה בת מניה.
- (ד)  $l_\infty$  לא ספרבילית. נראה זאת על ידי מציאה של א קבוצות פתוחות זרות. לכל  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  נסתכל על  $B\left(\{a_n\}, \frac{1}{3}\right)$ . קל לראות שעבור  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  מתקיים ש- $B\left(\{a_n\}, \frac{1}{3}\right)$  ו- $B\left(\{b_n\}, \frac{1}{3}\right)$  זרים. לוי הייתה תת קבוצה צפופה בת מניה, היא הייתה צריכה להכיל איבר מכל כדור כזה, אבל ידוע שיש א כאלה ולכן זו סתירה.
- (ה) קצת טכני לראות ש- $(C[0, 1], d_\infty)$  ספרבילי, אבל נראה את הגישה הכללית (אם מישהו לא מצליח להשלים את הפרטים החסרים לבד הוא מוזמן לפנות דרך המייל). נסתכל על "אינטרפולציות לינאריות-רציונליות" של פונקציות רציפות. כלומר, לכל  $n$  נגדיר  $I_n := \left\{ \frac{m}{n} \mid 1 \leq m \leq n \right\} \subseteq [0, 1]$  ונסתכל על הפונקציות  $LF_n \subseteq C[0, 1]$  שמקבלות ב- $I_n$  ערכים רציונליים ובכל קטע  $\left(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$  הן קו ישר בין הנקודות בקצוות. אפשר לראות ש- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} LF_n$  זו קבוצה צפופה בת מניה.
- (ו) קל לראות ש- $d_\infty$  דומיננטית ל- $d_1$  על  $C[0, 1]$  ולכן הטופולוגיה של  $(C[0, 1], d_\infty)$  חזקה מזו של  $(C[0, 1], d_1)$ . בפרט, אם החזקה ספרבילית החלשה גם כן.
- (ז) את המקרה של הטופולוגיה הקוֹסופית והקוֹבֶּת־מניה ראינו בתרגיל אחר בקובץ זה.
- (ח) כדי לראות ש- $([0, 1]^2, \langle l_{ex}, \tau_{\langle l_{ex}} \rangle)$  לא ספרבילי נמצא אוסף לא בן מניה של קבוצות פתוחות זרות. אכן, נסתכל על אוסף הקטעים הפתוחים:

$$\left\{ \left( (x, 0), (x, 1) \right) \right\}_{x \in [0, 1]}$$

קל לראות שהוא לא בן מניה וגם שכל שני אברים בו זרים. כמו במקרה של  $l_\infty$  גם כאן אפשר להסיק שהמרחב אינו ספרבילי.

