פתרון מבחן מועד ב – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 22/03/18

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos(x)\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(7x\right)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{7x}{\sin(7x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x}_{\text{חסומה}\cdot\text{אפיסה}\to 0}\cdot\frac{1}{7}=0$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x\cdot\arctan(x)\right)$

$$\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\arctan(x)\right)=\left\{\infty\left(1-0\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln\left(n\right)}$

לפי סדרי גודל, החל משלב מסויים:

$$1\le\ln(n)\le n$$

$$1\le\sqrt[n]{\ln(n)}\le\sqrt[n]{n}\to 1$$

ולפי סנדביץ' נקבל כי גבול הסדרה הוא 1.

2.

א. חשבו את $\int\frac{x^3+1}{x^2+5x+4}dx$.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}dx$.

.3

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x+\sin(x)=e^{-x}$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=e^x-e^{-x}+\sin(x)$$

$$h'(x)=e^x+e^{-x}+\cos(x)$$

לכל $x\geq 0$ מתקיים כי $e^x\geq 1$ ולכן לכל $x\geq 0$

$$h'(x)=(e^x+\cos(x))+e^{-x}\geq e^{-x}>0$$

באופן דומה, לכל $x<0$ מתקיים כי

$$h'(x)=(e^{-x}+\cos(x))+e^x\geq e^x>0$$

כלומר $h'>0$ בכל הממשיים, ולכן הפונקציה h עולה, וחותכת את הציר לא יותר מאשר פעם אחת.

במקרה זה ניתן לשים לב כי

$$h(0)=0$$

ולכן הפונקציה אכן חותכת את הציר, וסה"כ יש לה חיתוך יחיד.

ב. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=e^x+e^{-x}-\cos(x)$.

ראשית נשים לב כי

$$f'(x)=e^x-e^{-x}+\sin(x)=h(x)$$

לפי החקירה מסעיף קודם, h עלתה תמיד וחתכה את הציר בראשית הצירים.

לכן הייתה שלילית בשליליים, וחיובית בחיוביים, כלומר f עולה בתחום $[0,\infty)$ ויורדת בתחום $(-\infty,0]$

ומקבל את הערך המינימלי שלה בדיוק ב$x=0$

$$f(0)=1$$

4. תהי פונקציה f עבורה $2f(x)f'(x) \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

א. הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq 0$.

נבחר $f(x) = -1$ קבוע, ואכן $2 \cdot f \cdot f' = 0$ אך $f(x) < 0$

דוגמא נוספת $f(x) = -e^x$ ואז $2ff' = 2e^{2x} > 0$ אך $f < 0$

ב. הוכיחו שאם $f(0) = 0$ אזי לכל $x < 0$ מתקיים כי $f(x) = 0$.

נשים לב

$$\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x) \geq 0$$

ולכן $f^2(x)$ פונקציה <u>עולה</u>.

כמו כן

$$f^2(0) = 0$$

לכל $x < 0$ מתקיים כי

$$0 \underbrace{\leq}_{\text{ערך בריבוע}} f^2(x) \underbrace{\leq}_{\text{הפונקציה עולה}} f^2(0) = 0$$

ולכן לכל $x < 0$ אכן $f^2(x) = 0$ וכן $f(x) = 0$.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - 1$, ותנאי ההתחלה $1 < a_1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 1$$

נוכיח שלכל n מתקיים כי $a_n > 1$ ואז בעצם הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה כי

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 1 > 0$$

הוכחה באינדוקציה: בדיקה $a_1 > 1$ נתון; יהי n עבורו $a_n > 1$ אזי $a_{n+1} = 2a_n - 1 = a_n + a_n - 1 > 1 + 0$

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה אז היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim 2a_n - 1$$

$$L = 2L - 1$$

$$L = 1$$

אבל כיוון שהסדרה עולה מתקיים כי

$$L \geq a_1 > 1$$

בסתירה.

ולכן היא אינה חסומה ולכן $a_n \to \infty$.

.6

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+kn+k^2}$.

ב. הוכיחו כי השגיאה h בקירוב של $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ על ידי פולינום מקלורן של הפונקציה $f(x)=\cos(x)$ מסדר 2 מקיימת כי $|h| \leq \frac{1}{96}$ (ללא שימוש במחשבון, כמובן).