

ב"א אלגברה לינארית תשפב מועד ב

1. נתון המספר המרוכב $z = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ ונתון מספר מרוכב w כך ש $|w| = r > 0$. כמו כן נתון כי z, w נמצאים ברביע הראשון וכן כי $z = \frac{w}{\bar{w}}$.

(א) הביעו באמצעות α ו r את המספר w , את הצמוד שלו \bar{w} ואת ההופכי שלו $\frac{1}{w}$.
פתרון: נסמן $w = r \operatorname{cis}(\beta)$ ונקבל ש $\bar{w} = r \operatorname{cis}(-\beta)$ ואז הנתון $z = \frac{w}{\bar{w}}$ הוא

$$\operatorname{cis}(\alpha) = \frac{r \operatorname{cis}(\beta)}{r \operatorname{cis}(-\beta)} = \operatorname{cis}(\beta - (-\beta)) = \operatorname{cis}(2\beta) = [\operatorname{cis}(\beta)]^2$$

ולכן $\operatorname{cis}(\beta) = \pm \sqrt{\operatorname{cis}(\alpha)} = \pm \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. כיוון שנתון ש z, w ברביע הראשון אזי $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ ולכן גם $0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq 45^\circ$ ומכאן ש $\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ברביע הראשון ו $-\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ברביע השלישי. אם $\operatorname{cis}(\beta) = -\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ גם $w = r \operatorname{cis}(\beta) = r \left(-\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$ ומכאן ש $w = r \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. מכאן ש $\operatorname{cis}(\beta) = \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ומכאן ש $w = r \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

$$\bar{w} = r \operatorname{cis}\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = r \operatorname{cis}\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$$

1

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{r} \operatorname{cis}\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$$

(ב) שרטטו במערכת צירים את מעגל היחידה והוסיפו לשרטוט דוגמה של מספר w ושל ההופכי שלו $\frac{1}{w}$ עבור $r > 1$.
פתרון: נניח שהקורא יודע לצייר את מעגל היחידה. כעת אפשר לקחת $w = 10$ שבמערכת צירים מזוהה עם הנקודה $(10, 0)$ וההופכי שלו $\frac{1}{w} = \frac{1}{10}$ מזוהה עם הנקודה $\left(\frac{1}{10}, 0\right)$.

(ג) נתונה סדרה הנדסית a_n שבה $a_1 = \frac{1}{w}$ וכן $a_2 = z$. הביעו באמצעות α ו r את a_5 .
פתרון: מנת הסדרה היא

$$q = \frac{a_2}{a_1} = zw = \operatorname{cis}(\alpha) \cdot r \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = r \operatorname{cis}\left(\frac{3\alpha}{2}\right)$$

ולכן

$$a_5 = a_2 q^3 = z \cdot q^3 = \operatorname{cis}(\alpha) \cdot \left[r \operatorname{cis}\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right]^3 = r \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{9\alpha}{2}\right) = r \operatorname{cis}\left(\frac{11\alpha}{2}\right)$$

2. יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + ay + (a-1)z = 1 \\ -x - y + (2-a)z = 1 \\ (2-a)x + (2a-a^2)y = 1 \\ ax + a^2y + (2a-2)z = 1 \end{cases}$$

(א) מצאו לכל ערכי הפרמטר האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שאין פתרון. **פתרון:** נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ -1 & -1 & 2-a & 1 \\ 2-a & 2a-a^2 & 0 & 1 \\ a & a^2 & 2a-2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} R_3 + (a-2)R_1 \\ R_4 - aR_1 \end{array}]{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a-1 \\ 0 & 0 & -a^2+3a-2 & 1-a \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a-2) & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

וכעת:

אם $a-1 \neq 0$ וגם

$$(a-1)(a-2) \neq 0$$

נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נטפל בשאר המקרים:

• $a = 1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (y) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

• $a = 2$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

לסיכום: עבור $a \neq 1, 2$ יש פתרון יחיד. עבור $a = 2$ לא יהיה פתרון ועבור $a = 1$ יהיו אינסוף פתרונות.

(ב) עבור $a = 1$, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת. **פתרון:** ראינו שעבור $a = 1$ נקבל את המערכת (שהיא כבר מדורגת)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

שהפתרון שלה הוא (אם נציב $y = t$)

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1-t \\ t \\ 2 \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right) + \text{span} \left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$$

(ג) האם קיים ערך של a עבורו $\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{array} \right)$ פתרון למערכת? אם כן, מצאו אותו. **פתרון:** נניח שכן. אזי מתקיים

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & a-1 \\ -1 & -1 & 2-a \\ 2-a & 2a-a^2 & 0 \\ a & a^2 & 2a-2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & a-1 \\ -1 & -1 & 2-a \\ 2-a & 2a-a^2 & 0 \\ a & a^2 & 2a-2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -5 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} 6-6a \\ -10+5a \\ a^2-3a+2 \\ -a^2-9a+1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

נקבל מהקורדינאטה הראשונה את השיוון $1 = 3 - 3a$ שפתרונה $a = \frac{2}{3}$. מהקורדינאטה השנייה נקבל את השיוון $1 = -5 + \frac{5}{2}a$ ולכן אין a שמקיים את שתי השוויונות הנל ולכן לא קיים a כנדרש בשאלה.

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים למרחבים $C(A)$, $R(A)$, $N(A)$.

פתרון: נדרג את A :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן: שורות שונות מאפס בצורה מדורגת

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מהווים בסיס ל $R(A)$ ומימדו 2.

עמודות במטריצה A , שבצורה מדורגת יש בהם איבר פותח (עמודות 1 + 2),

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

מהוות בסיס ל $C(A)$ ומימדו 2.

לשם מציאת בסיס ל $N(A)$ נפתור את המערכת ההומוגנית, נציב $z = t$ ונקבל

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0.5t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ו } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ בסיס ל } N(A) \text{ ומימדו 1.}$$

(ב) מצאו בסיס למרחב $C(A) \cap R(A)$.

פתרון: נעביר את המרחבים $C(A)$, $R(A)$ לייצוג על ידי משוואות.

$C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 2 & 2 & y \\ 4 & 6 & z \end{array} \right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & -2 & z-2x \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & z-y-x \end{array} \right)$$

לכן

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z - y - x = 0 \right\}$$

$:R(A)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & y \\ 2 & 1 & z \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 1 & z - x \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 0 & z + \frac{1}{2}y - x \end{array} \right)$$

לכן

$$R(A) = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid z + \frac{1}{2}y - x = 0 \right\}$$

כעת

$$C(A) \cap R(A) = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -x - y + z = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y + z = 0 \end{array} \right\}$$

נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{2}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נציב במשתנה החופשי $z = t$ ונקבל כי

$$C(A) \cap R(A) = \left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ 0 \\ t \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

$$.C(A) \cap R(A) \text{ בסיס ל } \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\} \text{ ו}$$

4. נביט בזוג המישורים הנתונים באופן אלגברי

$$U = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \mid x + y - z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \mid x - y + 2z = 1 \right\}$$

(א) מצאו בסיס ל U . **פתרון:** נמצא בסיס על ידי פתירת מערכת המשוואות $(1 \ 1 \ -1 \mid 0)$ שמייצת את U . נציב

במשתנים החופשיים $y = t, z = s$ ונקבל ש

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל U ומימדו 2.

(ב) מצאו את הפתרון הכללי של W (זו הצורה הפרמטרית של המישור). **פתרון:** נמצא נפתור את מערכת המשוואות $(1 \ -1 \ 2 \mid 1)$ שמייצת את W . נציב במשתנים החופשיים $y = t, z = s$ ונקבל ש

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2s+t \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ג) האם W תת מרחב וקטורי של \mathbb{R}^3 ? **פתרון:** לא. וקטור האפס

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לא שייך ל W שהרי לא פותר את המשוואה $x - y + 2z = 1$ שמייצגת את W .

(ד) מצאו את החיתוך בין המישורים, $U \cap W$. הביעו אותו באופן פרמטרי. **פתרון:** נקבל ש

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

ונפתור את מערכת המשוואות $(1 \ 1 \ -1 \mid 0)$ שמייצגת את $U \cap W$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

נציב במשתנה החופשי $z = t$ ונקבל ש

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$