אנליזת פורייה ויישומים

30 ביולי 2014

תוכן עניינים

חלק I

הרצאה 1

חלק II

הרצאה 2

0.1 מרחב L^2

$$f, g \in C\left[a, b\right]$$

נגדיר מכפלה פנימית

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}dx\\ ||f|| &= \sqrt{\langle f,f\rangle}=\int_a^b |f|^2\,dx\end{aligned}$$

הערה 0.1 נורמה של f קיימת אם $|f|^2$ הינה אינטגרבילית. במקרה זה ניתן להגדיר מרחק בין פונקציות ע"י $||f-g||$ ($||f-g||=0 \Leftrightarrow f=g$).

הגדרה 0.2 $L^2[a,b]$ מרחב הפונקציות $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ כך ש$\int_a^b |f(x)|^2\,dx<\infty$.
מבחינה מעשית יש לבדוק את התנאי האחרון ולבדוק האם פונ' שייכת ל$L^2[a,b]$.

דוגמא:

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases}1 & 1\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}\\ ||f||^2 &= \int_0^{0.5} dx=\frac{1}{2}\Rightarrow f\in L^2[a,b]\end{aligned}$$

דוגמא לפונ' שלא שייכת ל$L^2(a,b)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}},\ 0<x<1\\ ||f||^2 &= \int_0^1 \frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x}dx\\ &= -\lim_{\epsilon\to0^+}\ln\epsilon=\infty\end{aligned}$$

עוד דוגמא:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\ -1 & else\end{cases}$$

0.1.1 התכנסות בנורמה

סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ב$L^2(a,b)$ מתכנסת בו אם קיימת פונקציה $f\in L^2(a,b)$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||=0$$

0.2 מרחב l_p

הגדרה 0.3 $x \in l_2$ אם $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מתכנסת (כלומר $\sum |\xi_n|^2 < \infty$).

הגדרה 0.4 הגדרת הנורמה והמכפלה פנימית במקרה זה:

$$\begin{aligned} ||x||_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \end{aligned}$$

0.2.1 אי שוויון קושי שוורץ עבור l_2

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| |y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}$$

הגדרה 0.5 באופן דומה עבור $p > 1$ ניתן להגדיר מרחב l_p: $x \in l_p$ אם $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$.

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

0.2.2 אי שוויון הלדר (Holders inequality)

אם נתונות שתי סדרות $x \in l_p, y \in l_q$ כאשר l_p, l_q מרחבים צמודים (כלומר $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| |\eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

הוכחה: ניעזר באי שוויון יונג Jung: עבור p, q צמודים $\forall \alpha, \beta > 0 : \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.
נסמן $\alpha = \frac{|\xi_n|}{||x||_p}, \beta = \frac{|\eta_n|}{||y||_q}$.
נציב לאי שוויון יונג:

$$\frac{|\xi_n|}{||x||_p} \frac{|\eta_n|}{||y||_q} \leq \frac{|\xi_n|^p}{||x||_p^p \, p} + \frac{|\eta_n|^q}{||y||_q^q \, q}$$

נעבור לסכומים:

$$\begin{aligned}\frac{\sum|\xi_n||\eta_n|}{||x||_p\,||y||_q} &\le \frac{\sum|\xi_n|^p}{||x||_p^p\,p}+\frac{\sum|\eta_n|^q}{||y||_q^q\,q}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\\ &\Downarrow\\ \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n||\eta_n| &\le ||x||_p\,||y||_q\end{aligned}$$

נציב את ההגדרה של נורמה ונקבל את הדרוש. ■

תרגיל

נתונה סדרה $x=\left\{\frac{5^n-3^n}{7^n}\right\}\in l_2$, נחשב את $||x||_2$:

$$\begin{aligned}||x||_2 &= \sqrt{\sum|\xi_n|^2}\\ ||x||_2^2 &= \sum\left(\frac{5^n-3^n}{7^n}\right)^2\\ &= \sum\frac{25^n-2*15^n+9^n}{49^n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{49}\right)^n-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15}{49}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{49}\right)^n\\ &= \frac{\frac{25}{49}}{1-\frac{25}{49}}-2\frac{\frac{15}{49}}{1-\frac{15}{49}}+\frac{\frac{9}{49}}{1-\frac{9}{49}}=\frac{16}{85}\\ ||x||_2 &= \frac{4}{\sqrt{85}}\end{aligned}$$

תרגיל: נראה את קיום אי שוויון קושי שוורץ במקרה של L^2.

הוכחה:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f\overline{g}dx,\ ||f||=\sqrt{\langle f,g\rangle}$$

$$\left|\left|\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right|\right|^2 = \int_a^b\left(\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right)^2dx\ge 0$$

$$\int_a^b\left(\frac{|f|^2}{||f||^2}-\frac{2|f||g|}{||f||\,||g||}+\frac{|g|^2}{||g||^2}\right)dx\ge 0$$

$$\int_a^b \frac{|f|\,|g|}{||f||\,||g||}dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|f|^2}{||f||^2}dx + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|g|^2}{||g||^2}dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f|\,|g|\,dx &\leq ||f||\,||g|| \\ \langle |f|, |g|\rangle &\leq ||f||\,||g|| \end{aligned}$$

מתכונת האינטגרציה $\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$ נקבל $|\langle f,g\rangle| \leq ||f||\,||g||$. ■

0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt

התהליך מייצר סדרה של וקטורים (פונ') אורתוגנליים $\{u_1,...,u_n\}$ מסדרה של וקטורים (פונ') בת"ל $\{v_1,...,v_n\}$ כך ש$span\{v_1,...,v_n\} = span\{u_1,...,u_n\}$.

התהליך הינו איטרטיבי:

שלב 1: $u_1 = v_1$

שלב 2: $u_2 = v_2 - \tilde{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1$.

$\vdots$

שלב n: $u_n = v_n - \tilde{v_n} = v_n - \frac{\langle v_n,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 - ... - \frac{\langle v_n,u_{n-1}\rangle}{\langle u_{n-1},u_{n-1}\rangle}u_{n-1}$.

0.3.1 פולינומי לג'נדר

$$P_n[x] = Span\left\{\underset{S_0}{x^0},...,\underset{S_n}{x^n}\right\}$$

מכפלה פנימית מוגדרת באופן הבא:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 = S_0(x) \\ P_1(x) &= S_1(x) - \frac{\langle S_1,P_0\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle} = S_1(x) = x \\ &\langle S_1,P_0\rangle = \int_{-1}^{1} x*1dx = 0 \\ P_2 &= S_2 - \tilde{S}_2 = S_2 - \frac{\langle S_2,P_0\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle}P_0 - \frac{\langle S_2,P_1\rangle}{\langle P_p,P_p\rangle}P_1 \\ &= \frac{3x^2-1}{3} \end{aligned}$$

ע"מ לגרום לפולינומי לג'נדר לקיים תנאי $P_n(1)=1$ נכתוב $P_2=\frac{3}{2}P_2=\frac{3x^2-1}{2}$

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1\\ P_1(x) &= x\\ P_2(x) &= \frac{3x^2-1}{2}\\ P_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{2}\\ &\vdots\\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\end{aligned}$$

$$\langle P_n,P_m\rangle=\int_{-1}^{1}P_nP_m dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}=\delta_{n,m}\frac{2}{2n+1}$$

0.3.2 פולינומי צ'בישב

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}p(x)\,q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1\\ T_1(x) &= x\\ T_2(x) &= 2x^2-1\\ T_3(x) &= 4x^3-3x\\ &\vdots\\ T_n(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)\,T_m(x)=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & m=n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

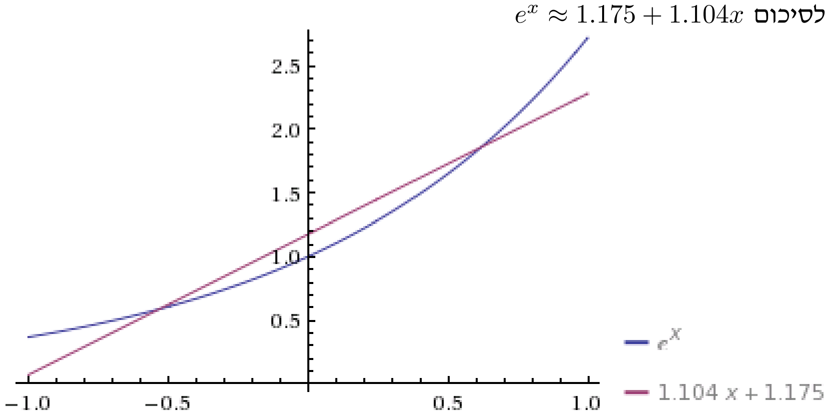
תרגיל:

מצא קירוב ל-e^x $f(x)=e^x$ באמצעות קו ישר בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:** נמצא היטל אורתוגונלי במרחב $Span\left\{P_0(x),P_1(x)\right\}$

נחשב $e^x\approx a_0P_0+a_1P_1$ כאשר

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle e^x,P_0\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle}=\frac{1}{2}\langle e^x,1\rangle=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^xdx=1.175 \\ a_1 &= \frac{\langle e^x,P_1\rangle}{\langle P_1,P_1\rangle}=...=1.104 \end{aligned}$$

לסיכום $e^x\approx 1.175+1.104x$



■

הערה 0.6 בהינתן קטע כללי (a,b) נתין להגדיר מ"פ חדשה המותאמת לקטע ובאמצעותה להגדיר מערכת חדשה של פולינומים אורתוגונליים ובאמצעותה לחשב את הקירוב הדרוש.

האפשרות הנוספת היא להגדיר העתקה ליניארית $\varphi:[a,b]\to[-1,1]$ ולהשתמש בה ואז ניתן לעבוד עם מע' אורתוגונלית קיימת.

0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים:

1. Laguerre

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^{\infty}e^{-x}p(x)q(x)dx$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x+1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right) \\ &\vdots \\ (k+1)L_{k+1}(x) &- (2k+1-x)L_k(x)+kL_{k-1}(x)=0 \end{aligned}$$

2. פולינומי הרמיט Hermite

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p(x)\, q(x)\, dx$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ &\vdots \\ H_{n+1} &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

דוגמא:

$$x \in [0,1]\,,\ f_n(x) = x^n$$

מקרה א': $0 \le x < 1$, $x^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$

מקרה ב': $x = 1$, $x^n \overset{n\to\infty}{\to} 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

f_n מתכנסת נקודתית לf, נבדוק התכנסות ב$L^2[0,1]$.

$$||x^n - 0|| = \sqrt{\int_0^1 x^{2n}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \sqrt{\frac{1}{2n-1}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

כלומר $x^n \overset{L^2}{\to} 0$.

דוגמא:

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases} 0 & ,x=0 \\ n & ,0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases} \\ f_n &\overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ ||f_n - 0||^2 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n^2 x\Big|_0^{\frac{1}{n}} = n \\ ||f_n - 0|| &= \sqrt{n} \not\to 0 \end{aligned}$$

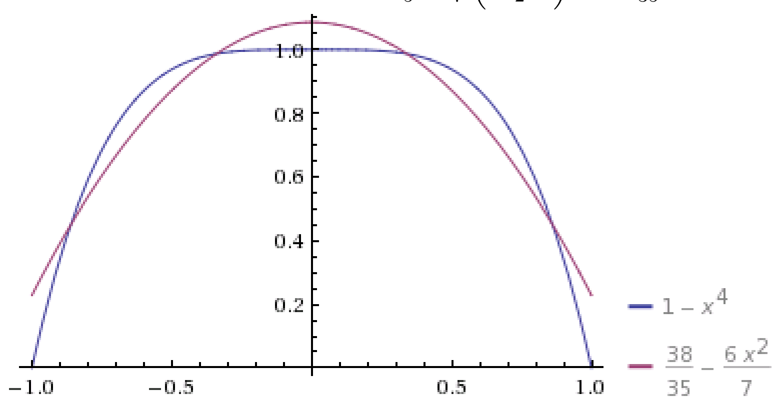
כלומר הסדרה לא מתכנסת ל$f = 0$ בL^2.

תרגיל

מצא קירוב ל$f\left(x\right)=1-x^{4}$ באמצעות פולינום ממעלה 2 בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:**

$$\begin{aligned}\tilde{f}\left(x\right) &= a_0P_0\left(x\right)+a_1P_1\left(x\right)+a_2P_2\left(x\right)\\ a_i &= \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)P_i\left(x\right)dx\\ a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)dx=\frac{4}{5}\\ a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)xdx=0\\ a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)\frac{3x^2-1}{2}dx=-\frac{4}{7}\end{aligned}$$

לסיכום $f\left(x\right)\approx\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)=\frac{38-30x^2}{35}$

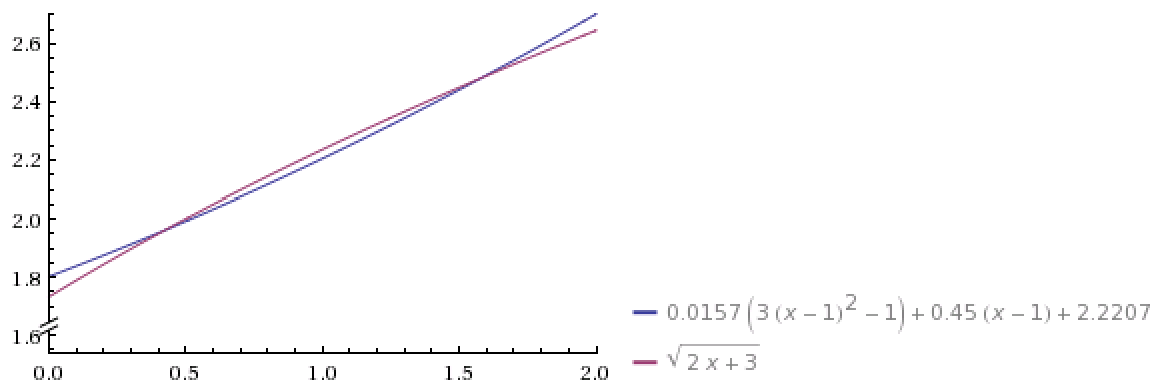


■

תרגיל

מצא קירוב ל$f\left(x\right)=\sqrt{2x+3}$ בקטע $[0,2]$באמצעות פולינום ממעלה שנייה. **הוכחה:**
נעתיק את הפונקציה מקטע $[0,2]$ לקטע $[-1,1]$ ע"י $t=x-1$, $x=t+1$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2x+3} \\
f(t) &= \sqrt{2t+5} \\
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 * \sqrt{2t+5}dt = 2.2207 \\
a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t * \sqrt{2t+5}dt = 0.45 \\
a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{3t^2-1}{2}\sqrt{2t+5}dt = 0.0314 \\
\tilde{f}(x) &= 2.2207 + 0.45(x-1) + 0.0314\frac{3(x-1)^2-1}{2}
\end{aligned}
$$



■