

אנליזת פורייה ויישומים

31 ביולי 2014

תוכן עניינים

1		I הרצאה 1
1		II הרצאה 2
1	מרחב L^2	0.1
2	התכנסות בנורמה	0.1.1
3	מרחב l_p	0.2
3	אי שוויון קושי שורץ עבור l_2	0.2.1
3	אי שוויון הלדר (Holders inequality)	0.2.2
5	תהליך גרם שמידט Gram Schmidt	0.3
5	פולינומי לג'נדר	0.3.1
6	פולינומי צ'בישב	0.3.2
7	פולינומים אורתוגונליים נוספים:	0.3.3
9		III הרצאה 3
9	מערכת אורתונורמלית אינסופית	1
12	טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות.	1.1
12	תכונות:	1.1.1
14	תופעת גיבס - שגיאה בטור חלקי של טור פוריה	1.1.2

חלק I

הרצאה 1

חלק II

הרצאה 2

0.1 מרחב L^2

$$f, g \in C[a, b]$$

נגדיר מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \int_a^b |f|^2 dx$$

הערה 0.1 נורמה של f קיימת אם $|f|^2$ הינה אינטגרבילית. במקרה זה ניתן להגדיר מרחק בין פונקציות ע"י $\|f - g\|$ ($\|f - g\| = 0 \Leftrightarrow f = g$).

הגדרה 0.2 $L^2[a, b]$ מרחב הפונקציות $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. מבחינה מעשית יש לבדוק את התנאי האחרון ולבדוק האם פונ' שייכת ל $L^2[a, b]$.

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1/2 \end{cases}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^{0.5} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow f \in L^2[a, b]$$

דוגמא לפונ' שלא שייכת ל $L^2(a, b)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx$$

$$= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \epsilon = \infty$$

עוד דוגמא:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ -1 & else \end{cases}$$

0.1.1 התכנסות בנורמה

סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב $L^2(a, b)$ מתכנסת בו אם קיימת פונקציה $f \in L^2(a, b)$ כך ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

0.2 מרחב l_p

הגדרה 0.3 אם $x \in l_2$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$ (כלומר $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מתכנסת).

הגדרה 0.4 הגדרת הנורמה והמכפלה פנימית במקרה זה:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

0.2.1 אי שוויון קושי שורץ עבור l_2

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2}$$

הגדרה 0.5 באופן דומה עבור $p > 1$ ניתן להגדיר מרחב l_p : אם $x \in l_p$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

0.2.2 אי שוויון הולדר (Holders inequality)

אם נתונות שתי סדרות $x \in l_p, y \in l_q$ כאשר l_p, l_q מרחבים צמודים (כלומר $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| |\eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

הוכחה: ניעזר באי שוויון יונג Jung: עבור p, q צמודים $\alpha, \beta > 0$:

$$\alpha = \frac{|\xi_n|}{\|x\|_p}, \beta = \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q}$$

נציב לאי שוויון יונג:

$$\frac{|\xi_n|}{\|x\|_p} \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q} \leq \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

נעבור לסכומים:

$$\begin{aligned} \frac{\sum |\xi_n| |\eta_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{\sum |\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{\sum |\eta_n|^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &\downarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| |\eta_n| &\leq \|x\|_p \|y\|_q \end{aligned}$$

נציב את ההגדרה של נורמה ונקבל את הדרוש.

תרגיל

נתונה סדרה $x = \left\{ \frac{5^n - 3^n}{7^n} \right\} \in l_2$, נחשב את $\|x\|_2$:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{\sum |\xi_n|^2} \\ \|x\|_2^2 &= \sum \left(\frac{5^n - 3^n}{7^n} \right)^2 \\ &= \sum \frac{25^n - 2 * 15^n + 9^n}{49^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{25}{49} \right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15}{49} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{49} \right)^n \\ &= \frac{\frac{25}{49}}{1 - \frac{25}{49}} - 2 \frac{\frac{15}{49}}{1 - \frac{15}{49}} + \frac{\frac{9}{49}}{1 - \frac{9}{49}} = \frac{16}{85} \\ \|x\|_2 &= \frac{4}{\sqrt{85}} \end{aligned}$$

תרגיל: נראה את קיום אי שוויון קושי שורץ במקרה של L^2 .

הוכחה:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g} dx, \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$$\left\| \frac{|f|}{\|f\|} - \frac{|g|}{\|g\|} \right\|^2 = \int_a^b \left(\frac{|f|}{\|f\|} - \frac{|g|}{\|g\|} \right)^2 dx \geq 0$$

$$\int_a^b \left(\frac{|f|^2}{\|f\|^2} - \frac{2|f||g|}{\|f\|\|g\|} + \frac{|g|^2}{\|g\|^2} \right) dx \geq 0$$

$$\int_a^b \frac{|f||g|}{\|f\|\|g\|} dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|f|^2}{\|f\|^2} dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|g|^2}{\|g\|^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f||g| dx &\leq \|f\|\|g\| \\ \langle |f|, |g| \rangle &\leq \|f\|\|g\| \end{aligned}$$

מתכונת האינטגרציה $\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx$ נקבל $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|\|g\|$.

0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt

התהליך מייצר סדרה של וקטורים (פונ') אורתוגנליים $\{u_1, \dots, u_n\}$ מסדרה של וקטורים (פונ') בת"ל $\{v_1, \dots, v_n\}$ כך ש $span\{v_1, \dots, v_n\} = span\{u_1, \dots, u_n\}$.
 התהליך הינו איטרטיבי:

$$\begin{aligned} \text{שלב 1: } u_1 &= v_1 \\ \text{שלב 2: } u_2 &= v_2 - \tilde{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\ &\vdots \\ \text{שלב } n: u_n &= v_n - \tilde{v}_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1} \end{aligned}$$

0.3.1 פולינומי לגנדר

$$P_n[x] = Span \left\{ x^0, \dots, x^n \right\}$$

מכפלה פנימית מוגדרת באופן הבא:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$$

$$P_0(x) = 1 = S_0(x)$$

$$P_1(x) = S_1(x) - \frac{\langle S_1, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 = S_1(x) = x$$

$$\langle S_1, P_0 \rangle = \int_{-1}^1 x * 1 dx = 0$$

$$\begin{aligned} P_2 &= S_2 - \tilde{S}_2 = S_2 - \frac{\langle S_2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 - \frac{\langle S_2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} P_1 \\ &= \frac{3x^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

ע"מ לגרום לפולינומי לגנדר לקיים תנאי $P_n(1) = 1$ נכתוב $P_2 = \frac{3}{2}P_2 = \frac{3x^2-1}{2}$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

\vdots

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n P_m dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases} = \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1}$$

0.3.2 פולינומי צ'בישב

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} p(x) q(x) dx$$

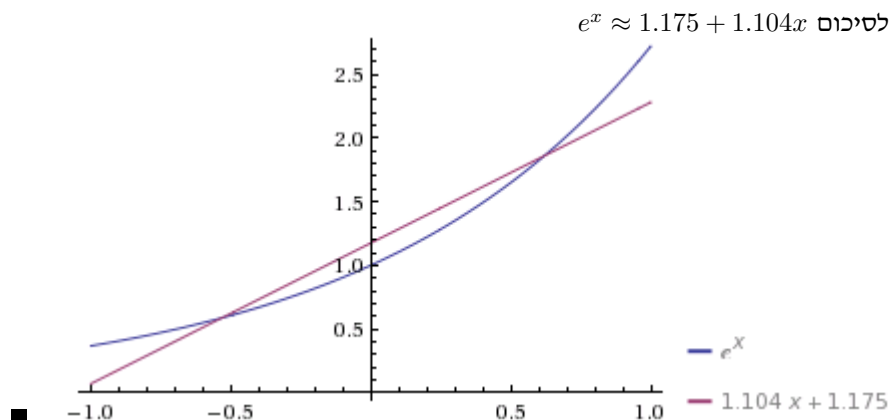
$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\vdots \\ T_n(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n (2n-1)(2n-3)\dots 1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

תרגיל:

מצא קירוב ל- $f(x) = e^x$ באמצעות קו ישר בקטע $[-1, 1]$. הוכחה: נמצא היטל אורתוגונלי במרחב $\text{Span}\{P_0(x), P_1(x)\}$ נחשב $e^x \approx a_0 P_0 + a_1 P_1$ כאשר

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle e^x, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{1}{2} \langle e^x, 1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^x dx = 1.175 \\ a_1 &= \frac{\langle e^x, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \dots = 1.104 \end{aligned}$$



הערה 0.6 בהינתן קטע כללי (a, b) נתין להגדיר מ"פ חדשה המותאמת לקטע ובאמצעותה להגדיר מערכת חדשה של פולינומים אורתוגונליים ובאמצעותה לחשב את הקירוב הדרוש. האפשרות הנוספת היא להגדיר העתקה ליניארית $\varphi : [a, b] \rightarrow [-1, 1]$ ולהשתמש בה ואז ניתן לעבוד עם מע' אורתוגונלית קיימת.

0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים:

.1 Laguerre

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

$$\vdots$$

$$(k+1)L_{k+1}(x) - (2k+1-x)L_k(x) + kL_{k-1}(x) = 0$$

.2 פולינומי הרמיט Hermite

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} p(x) q(x) dx$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$\vdots$$

$$H_{n+1} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

דוגמא:

$$x \in [0, 1], f_n(x) = x^n$$

$$\begin{aligned} & \text{מקרה א': } 0 \leq x < 1, x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ & \text{מקרה ב': } x = 1, x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

f_n מתכנסת נקודתית ל- f , נבדוק התכנסות ב- $L^2 [0, 1]$.

$$\|x^n - 0\| = \sqrt{\int_0^1 x^{2n}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר $x^n \xrightarrow{L^2} 0$.

דוגמא:

$$f_n = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ n & , 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|f_n - 0\|^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n^2 x \Big|_0^{\frac{1}{n}} = n$$

$$\|f_n - 0\| = \sqrt{n} \not\rightarrow 0$$

כלומר הסדרה לא מתכנסת ל- $f = 0$ ב- L^2 .

תרגיל

מצא קירוב ל- $f(x) = 1 - x^4$ באמצעות פולינום ממעלה 2 בקטע $[-1, 1]$. **הוכחה:**

$$\tilde{f}(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

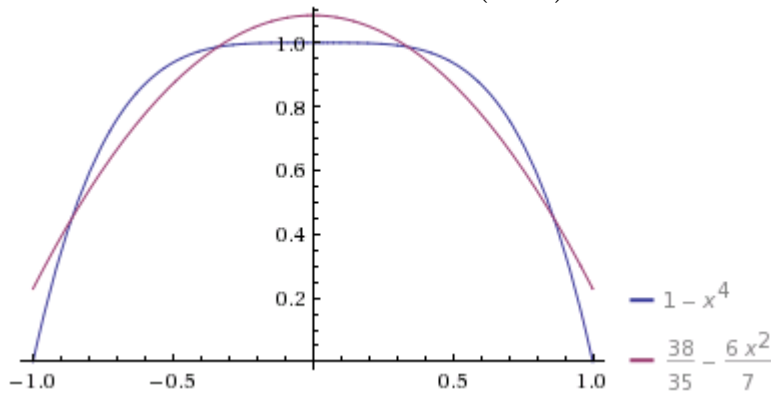
$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_i(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{4}{5}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) x dx = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) \frac{3x^2 - 1}{2} dx = -\frac{4}{7}$$

$$f(x) \approx \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) = \frac{38 - 30x^2}{35}$$



תרגיל

מצא קירוב ל- $f(x) = \sqrt{2x+3}$ בקטע $[0, 2]$ באמצעות פולינום ממעלה שנייה. **הוכחה:** נעתיק את הפונקציה מקטע $[0, 2]$ לקטע $[-1, 1]$ ע"י $x = t + 1, t = x - 1$.

$$f(x) = \sqrt{2x+3}$$

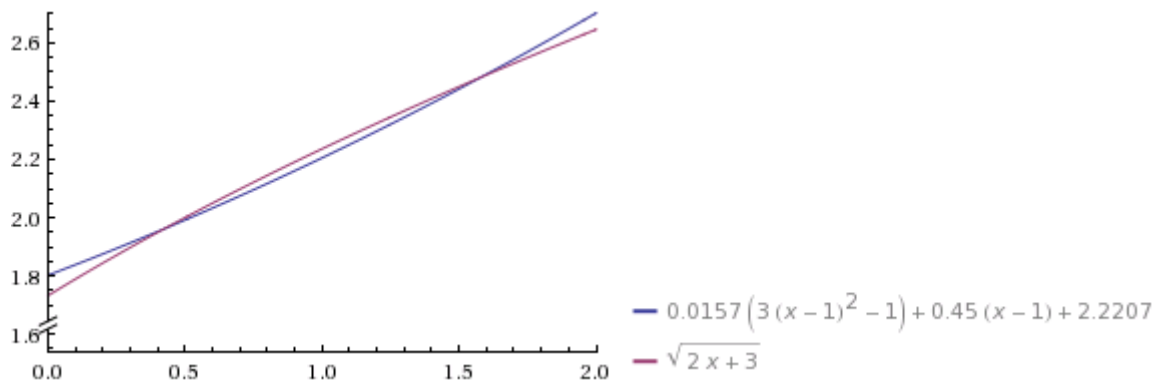
$$f(t) = \sqrt{2t+5}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 * \sqrt{2t+5} dt = 2.2207$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t * \sqrt{2t+5} dt = 0.45$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \frac{3t^2-1}{2} \sqrt{2t+5} dt = 0.0314$$

$$\tilde{f}(x) = 2.2207 + 0.45(x-1) + 0.0314 \frac{3(x-1)^2-1}{2}$$



חלק III הרצאה 3

1 מערכת אורתונורמלית אינסופית

הגדרה 1.1 מרחב סגור

תהי $\{e_1, e_2, \dots\}$ מע' אורתונורמלית אינסופית במרחב מ"פ V . נאמר שהמערכת הינה סגורה ב- V אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{i=1}^m \langle u, e_i \rangle e_i \right\| = 0$$

טענה 1.2 המע' האורתונורמלית $\{e_1, e_2, \dots\}$ סגורה במרחב מ"פ אמ"מ לכל $u \in V$ מתקיים

השוויון

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 = \|u\|^2$$

הערה 1.3 השוויון הנ"ל נקרא שוויון פרסבל.

הגדרה 1.4 $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת רציפה למקוטעין, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. ל- f יש לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות.

2. בכל נק' אי-רציפות קיימים הגבולות החד צדדים.

פונ' רציפה למקוטעין מגדירה מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין.

הגדרה 1.5 E מרחב ליניארי של פונקציות הרציפות למקוטעין. נגדיר מ"פ על מרחב זה:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

נתבונן במע' האינסופית הבאה:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \right\}$$

נבדוק אורתוגונליות ונורמה של כל איבר

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x dx = 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi n} [\cos nx]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \langle \sin mx, \sin nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \end{aligned}$$

ניתן לפתור בזהות טריגונומטרית $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ או באינטגרציה בחלקים $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$, נפתור בדרך הראשונה.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \langle \sin mx, \cos nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \text{ (odd function)} \end{aligned}$$

בדיקת נורמות:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx} = \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \right]_{-\pi}^{\pi} = 1 \\ \|\sin nx\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = 1 \\ \|\cos nx\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = 1 \end{aligned}$$

ראינו כי במע' אורתונורמלית אינסופית הקרוב $f \in E$ הינו מהצורה $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_j$.

במערכת שהוגדרה ישנם 3 סוגים של איברים:

1. $e_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

2. $e_n = \sin nx$

$$\langle f, \sin nx \rangle \sin nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \sin nx$$

3. $e_n = \cos nx$

$$\langle f, \cos nx \rangle \cos nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cos nx$$

הגדרה 1.6 טור פוריה:
תהי $f \in E$ הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הינו טור פורייה המתאים ל- f

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

נסמן:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < \pi \\ -2 & , -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

שלבי עבודה: מציאת a_0, a_n, b_n

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -2 dx + \int_0^{\pi} dx \right) = -1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -2 \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \begin{cases} 0 & , n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{n} + \frac{2}{n} \right) = \frac{6}{n\pi} & , n \in 2\mathbb{N} - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ולכן:

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

1.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות.

הגדרה 1.7 פונ' f הינה זוגית אם $f(-x) = f(x)$ ואי זוגית אם $f(-x) = -f(x)$.

1.1.1 תכונות:

1. זוגית \times זוגית = זוגית

2. אי-זוגית \times זוגית = אי-זוגית

3. זוגית = אי-זוגית \times אי זוגית

כידוע אם $f(x)$ הינה אי זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 0$$

ואם $f(x)$ הינה זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$$

במקרה זה טורי פוריה מוגדרים באופן הבא:

1. עבור $f \in E$ זוגית

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

במקרה זה הטור נקרא "טור קוסינוסים".

2. עבור $f \in E$ אי-זוגית

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

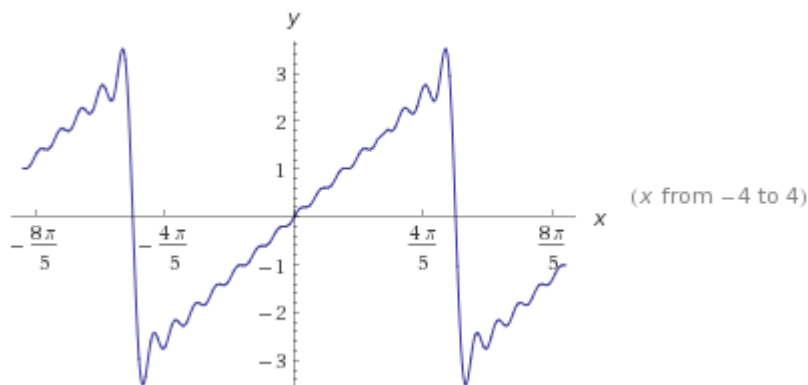
במקרה זה הטור נקרא "טור סינוסים".

דוגמא

נחשב טור פוריה של $f(x) = x$. $f(x)$ הינה אי זוגית \Leftrightarrow יתקבל טור סינוסים $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{-\pi (-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$



1.1.2 תופעת גיבס - שגיאה בטור חלקי של טור פוריה

ננתח את הדוגמא האחרונה $f(x) = x$

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

נתבונן בקטע $[0, \pi]$ נחלק את הרקע ל- m קטעים ונבדוק מהו הערך של T_m בנקודה $x_m = \pi - \frac{\pi}{m}$

$$\begin{aligned} T_m(x_m) &= \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n \left(\pi - \frac{\pi}{m} \right) = (*) \\ \sin n \left(\pi - \frac{\pi}{m} \right) &= \sin n\pi \cos \frac{n\pi}{m} - \cos n\pi \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= 0 - (-1)^n \sin \frac{n\pi}{m} = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{m} \\ (*) &= \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= 2 \sum_{n=1}^m \frac{\sin \frac{n\pi}{m}}{n} \end{aligned}$$

הגבול של הביטוי האחרון כאשר $m \rightarrow \infty$ הינו האינטגרל

$$2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

לפי ההגדרה של סכומי רימן $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$

$$(*) = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^\pi \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) dx \approx 1.18\pi$$

באופן זה ניתן להאריך של השגיאה היחסית המתקבלת בנק' הקרובה ל- π .

$$\frac{1.18\pi - \pi}{2\pi} \approx 0.09 = 9\%$$

הערה 1.8 ישנה טענה המכלילה את התוצאה האחרונה ולפי טענה זו, גודל השגיאה לא עולה על 9% מגודל הקפיצה בנק' אי רציפות.

תרגיל

נתון $f(x) \in E[-\pi, \pi]$ לכל $a, b, c \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$G(a, b, c) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + a + b \cos x + c \sin x|^2 dx$$

עבור איזה ערך של a, b, c מקבלת את ערכה המינימלי?

פתרון

ניתן לתייחס ל- $G(a, b, c)$ כאל $\| \cdot \|$ של ההפרש בין $f(x)$ לקירוב שלה באמצעות המערכת $\{1, \cos x, \sin x\}$, כלומר:

$$\|f - (-a - b \cos x - c \sin x)\|^2$$

באופן כזה נמצא את:

$$\begin{aligned} -a &= \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ -b &= \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ -c &= \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$