אנליזת פורייה ויישומים

4 באוגוסט 2014

תוכן עניינים

חלק I
הרצאה 1
חלק II
הרצאה 2
0.1 מרחב L^2

$$f,g\in C\left[a,b\right]$$

נגדיר מכפלה פנימית

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \int_a^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx\\ ||f|| &= \sqrt{\langle f,f\rangle}=\int_a^b\left|f\right|^2dx\end{aligned}$$

הערה 0.1 נורמה של f קיימת אם $\left|f\right|^2$ הינה אינטגרבילית. במקרה זה ניתן להגדיר מרחק בין פונקציות ע"י $||f-g||$ ($||f-g||=0\Leftrightarrow f=g$).

הגדרה 0.2 $L^2\left[a,b\right]$ מרחב הפונקציות $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ כך ש$\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|^2dx<\infty$.
מבחינה מעשית יש לבדוק את התנאי האחרון ולבדוק האם פונ' שייכת ל$L^2\left[a,b\right]$.

דוגמא:

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \begin{cases}1 & 1\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le x\le1\end{cases}\\ ||f||^2 &= \int_0^{0.5}dx=\frac{1}{2}\Rightarrow f\in L^2\left[a,b\right]\end{aligned}$$

דוגמא לפונ' שלא שייכת ל$L^2\left(a,b\right)$:

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{x}},\ 0<x<1\\ ||f||^2 &= \int_0^1\frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^1\frac{1}{x}dx\\ &= -\lim_{\epsilon\to0^+}\ln\epsilon=\infty\end{aligned}$$

עוד דוגמא:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\ -1 & else\end{cases}$$

0.1.1 התכנסות בנורמה

סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב$L^2\left(a,b\right)$ מתכנסת בו אם קיימת פונקציה $f\in L^2\left(a,b\right)$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||=0$$

0.2 מרחב l_p

הגדרה 0.3 $x\in l_2$ אם $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מתכנסת (כלומר $\sum\left|\xi_n\right|^2<\infty$).

הגדרה 0.4 הגדרת הנורמה והמכפלה פנימית במקרה זה:

$$\begin{aligned}||x||_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^2}\\ \langle x,y\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}\end{aligned}$$

0.2.1 אי שוויון קושי שוורץ עבור l_2

$$\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|\left|y_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^2}$$

הגדרה 0.5 באופן דומה עבור $p>1$ ניתן להגדיר מרחב l_p: $x\in l_p$ אם $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k\right|^p<\infty$.

$$||x||_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

0.2.2 אי שוויון הלדר (Holders inequality)

אם נתונות שתי סדרות $x\in l_p, y\in l_q$ כאשר l_p,l_q מרחבים צמודים (כלומר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\xi_n\right|\left|\eta_n\right|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\xi_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\eta_n\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

הוכחה: ניעזר באי שוויון יונג Jung: עבור p,q צמודים $\forall\alpha,\beta>0:\alpha\beta\le\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$.
נסמן $\alpha=\frac{|\xi_n|}{||x||_p},\beta=\frac{|\eta_n|}{||y||_q}$.
נציב לאי שוויון יונג:

$$\frac{|\xi_n|}{||x||_p}\frac{|\eta_n|}{||y||_q}\le\frac{|\xi_n|^p}{||x||_p^p\,p}+\frac{|\eta_n|^q}{||y||_q^q\,q}$$

נעבור לסכומים:

$$\begin{aligned}\frac{\sum|\xi_n|\,|\eta_n|}{||x||_p\,||y||_q} &\le \frac{\sum|\xi_n|^p}{||x||_p^p\,p}+\frac{\sum|\eta_n|^q}{||y||_q^q\,q}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\\ &\Downarrow\\ \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|\eta_n| &\le ||x||_p\,||y||_q\end{aligned}$$

נציב את ההגדרה של נורמה ונקבל את הדרוש. ■

תרגיל

נתונה סדרה $x=\left\{\frac{5^n-3^n}{7^n}\right\}\in l_2$, נחשב את $||x||_2$:

$$\begin{aligned}||x||_2 &= \sqrt{\sum|\xi_n|^2}\\ ||x||_2^2 &= \sum\left(\frac{5^n-3^n}{7^n}\right)^2\\ &= \sum\frac{25^n-2*15^n+9^n}{49^n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{49}\right)^n-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15}{49}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{49}\right)^n\\ &= \frac{\frac{25}{49}}{1-\frac{25}{49}}-2\frac{\frac{15}{49}}{1-\frac{15}{49}}+\frac{\frac{9}{49}}{1-\frac{9}{49}}=\frac{16}{85}\\ ||x||_2 &= \frac{4}{\sqrt{85}}\end{aligned}$$

תרגיל: נראה את קיום אי שוויון קושי שוורץ במקרה של L^2.

הוכחה:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f\bar{g}dx,||f||=\sqrt{\langle f,g\rangle}$$

$$\left|\left|\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right|\right|^2 = \int_a^b\left(\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right)^2dx\ge0$$

$$\int_a^b \left(\frac{|f|^2}{||f||^2} - \frac{2\,|f|\,|g|}{||f||\,||g||} + \frac{|g|^2}{||g||^2}\right) dx \geq 0$$

$$\int_a^b \frac{|f|\,|g|}{||f||\,||g||} dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|f|^2}{||f||^2} dx + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|g|^2}{||g||^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f|\,|g|\,dx &\leq ||f||\,||g|| \\ \langle |f|\,,|g|\rangle &\leq ||f||\,||g|| \end{aligned}$$

מתכונת האינטגרציה $\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$ נקבל $|\langle f,g\rangle| \leq ||f||\,||g||$. ■

0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt

התהליך מייצר סדרה של וקטורים (פונ') אורתוגנליים $\{u_1,...,u_n\}$ מסדרה של וקטורים (פונ') בת"ל $\{v_1,...,v_n\}$ כך ש$span\{v_1,...,v_n\} = span\{u_1,...,u_n\}$.

התהליך הינו איטרטיבי:

שלב 1: $u_1 = v_1$

שלב 2: $u_2 = v_2 - \tilde{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1$.

$\vdots$

שלב n: $u_n = v_n - \tilde{v_n} = v_n - \frac{\langle v_n,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 - ... - \frac{\langle v_n,u_{n-1}\rangle}{\langle u_{n-1},u_{n-1}\rangle}u_{n-1}$.

0.3.1 פולינומי לג'נדר

$$P_n[x] = Span\left\{\underset{S_0}{x^0},...,\underset{S_n}{x^n}\right\}$$

מכפלה פנימית מוגדרת באופן הבא:

$$\langle p(x)\,,q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 = S_0(x) \\ P_1(x) &= S_1(x) - \frac{\langle S_1,P_0\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle} = S_1(x) = x \\ & \langle S_1,P_0\rangle = \int_{-1}^{1} x * 1dx = 0 \\ P_2 &= S_2 - \tilde{S_2} = S_2 - \frac{\langle S_2,P_0\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle}P_0 - \frac{\langle S_2,P_1\rangle}{\langle P_p,P_p\rangle}P_1 \\ &= \frac{3x^2-1}{3} \end{aligned}$$

ע"מ לגרום לפולינומי לג'נדר לקיים תנאי $P_n(1)=1$ נכתוב $P_2=\frac{3}{2}P_2=\frac{3x^2-1}{2}$

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1\\ P_1(x) &= x\\ P_2(x) &= \frac{3x^2-1}{2}\\ P_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{2}\\ &\vdots\\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\end{aligned}$$

$$\langle P_n,P_m\rangle=\int_{-1}^{1}P_nP_mdx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}=\delta_{n,m}\frac{2}{2n+1}$$

0.3.2 פולינומי צ'בישב

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}p(x)\,q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1\\ T_1(x) &= x\\ T_2(x) &= 2x^2-1\\ T_3(x) &= 4x^3-3x\\ &\vdots\\ T_n(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)...1}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)\,T_m(x)=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & m=n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

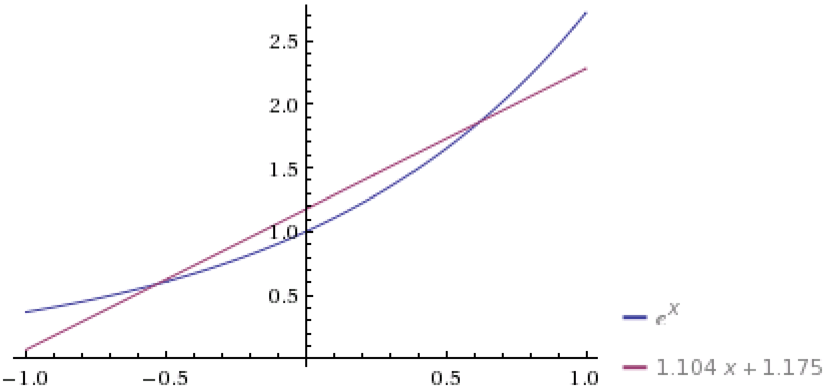
תרגיל:

מצא קירוב ל־$f(x)=e^x$ באמצעות קו ישר בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:** נמצא היטל אורתוגונלי במרחב $Span\{P_0(x),P_1(x)\}$

נחשב $e^x \approx a_0P_0 + a_1P_1$ כאשר

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle e^x, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{1}{2}\langle e^x, 1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = 1.175 \\ a_1 &= \frac{\langle e^x, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = ... = 1.104 \end{aligned}$$

לסיכום $e^x \approx 1.175 + 1.104x$



■

הערה 0.6 בהינתן קטע כללי (a,b) נתין להגדיר מ"פ חדשה המותאמת לקטע ובאמצעותה להגדיר מערכת חדשה של פולינומים אורתוגונליים ובאמצעותה לחשב את הקירוב הדרוש.
האפשרות הנוספת היא להגדיר העתקה ליניארית $\varphi : [a,b] \to [-1,1]$ ולהשתמש בה ואז ניתן לעבוד עם מע' אורתוגונלית קיימת.

0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים:

1. Laguerre

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x)\, q(x)\, dx$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x+1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right) \\ &\vdots \\ (k+1)\, L_{k+1}(x) &- (2k+1-x)\, L_k(x) + kL_{k-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

2. פולינומי הרמיט Hermite

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} p(x)\, q(x)\, dx$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2-2 \\ &\vdots \\ H_{n+1} &= 2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

דוגמא:

$$x\in[0,1]\,,\ f_n(x)=x^n$$

מקרה א': $0\le x<1$,$x^n\overset{n\to\infty}{\to}0$

מקרה ב': $x=1$,$x^n\overset{n\to\infty}{\to}1$

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

f_n מתכנסת נקודתית לf, נבדוק התכנסות ב$L^2[0,1]$.

$$||x^n-0||=\sqrt{\int_0^1 x^{2n}}=\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1=\sqrt{\frac{1}{2n-1}}\overset{n\to\infty}{\to}0$$

כלומר $x^n\overset{L^2}{\to}0$.

דוגמא:

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases}0 & ,x=0\\ n & ,0<x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}<x\le1\end{cases} \\ f_n &\overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ ||f_n-0||^2 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2dx=\left.n^2x\right|_0^{\frac{1}{n}}=n \\ ||f_n-0|| &= \sqrt{n}\not\to 0 \end{aligned}$$

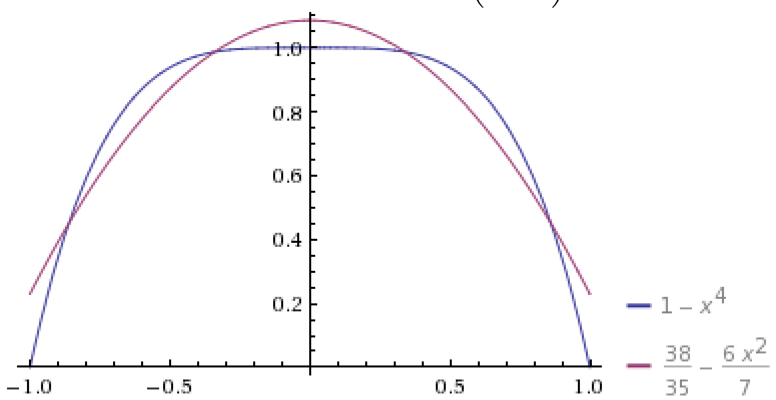
כלומר הסדרה לא מתכנסת ל$f=0$ בL^2.

תרגיל

מצא קירוב ל־$f(x)=1-x^4$ באמצעות פולינום ממעלה 2 בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:**

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)\\ a_i &= \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_i(x)\,dx\\ a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)dx=\frac{4}{5}\\ a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)xdx=0\\ a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^4\right)\frac{3x^2-1}{2}dx=-\frac{4}{7}\end{aligned}$$

לסיכום $f(x)\approx\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)=\frac{38-30x^2}{35}$

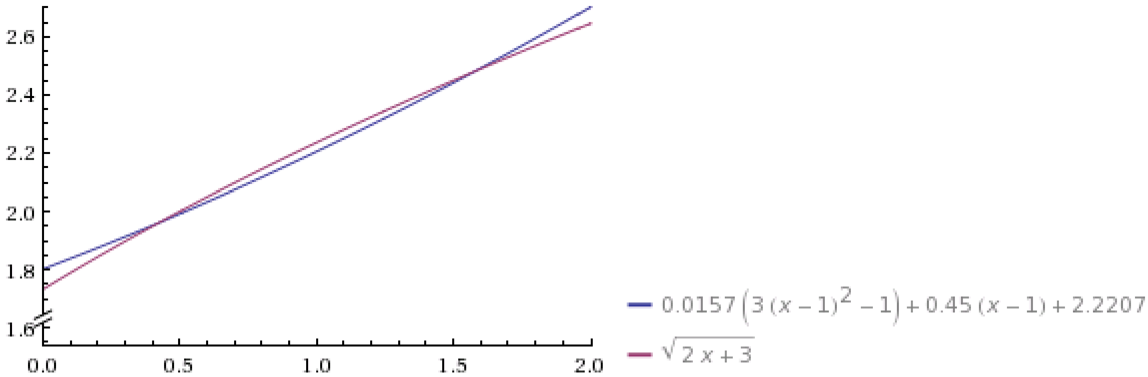


■

תרגיל

מצא קירוב ל־$\sqrt{2x+3}$ $f(x)=$ בקטע $[0,2]$באמצעות פולינום ממעלה שנייה. **הוכחה:**
נעתיק את הפונקציה מקטע $[0,2]$ לקטע $[-1,1]$ ע"י $t=x-1$, $x=t+1$.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{2x+3}\\ f(t) &= \sqrt{2t+5}\\ a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1*\sqrt{2t+5}dt=2.2207\\ a_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t*\sqrt{2t+5}dt=0.45\\ a_2 &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3t^2-1}{2}\sqrt{2t+5}dt=0.0314\\ \tilde{f}(x) &= 2.2207+0.45(x-1)+0.0314\frac{3(x-1)^2-1}{2}\end{aligned}$$



■

חלק III
הרצאה 3

1 מערכת אורתונורמלית אינסופית

הגדרה 1.1 מרחב סגור
תהי $\{e_1, e_2, ...\}$ מע' אורתונורמלית אינסופית במרחב מ"פ V. נאמר שהמערכת הינה סגורה ב־V אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\left|\left|u-\sum_{i=1}^{\infty}\langle u,e_i\rangle e_i\right|\right|=0$$

טענה 1.2 המע' האורתונורמלית $\{e_1, e_2, ...\}$ סגורה במרחב מ"פ אמ"מ לכל $u \in V$ מתקיים השוויון

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle u,e_i\rangle|^2=||u||^2$$

הערה 1.3 השוויון הנ"ל נקרא שוויון פרסבל.

הגדרה 1.4 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ נקראת רציפה למקוטעין, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. ל־f יש לכל היותר מספר סופי של נקודות אי־רציפות.
2. בכל נק' אי־רציפות קיימים הגבולות החד צדדים.

פונ' רציפה למקוטעין מגדירה מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין.

הגדרה 1.5 E מרחב ליניארי של פונקציות הרציפות למקוטעין.
נגדיר מ"פ על מרחב זה:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$$

נתבונן במע' האינסופית הבאה:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...\right\}$$

נבדוק אורתוגונליות ונורמה של כל איבר

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x\right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos xdx=0\\ \left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\sin nx\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi n}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}=0\\ \langle\sin mx,\sin nx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx\end{aligned}$$

ניתן לפתור בזהות טריגונומטרית $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$ או באינטגרציה בחלקים $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$, נפתור בדרך הראשונה.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(m-n\right)x-cos\left(m+n\right)x\right)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(m-n\right)x}{m-n}-\frac{\sin\left(m+n\right)}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0\\ \langle\sin mx,\cos nx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx=0\text{ (odd function)}\end{aligned}$$

בדיקת נורמות:

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right| &= \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx}=\left[\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right]_{-\pi}^{\pi}=1\\ \left|\left|\sin nx\right|\right|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=1\\ \left|\left|\cos nx\right|\right|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=1\end{aligned}$$

ראינו כי במע' אורתונורמלית אינסופית הקרוב ל$f\in E$ הינו מהצורה $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,e_i\rangle e_j$.

במערכת שהוגדרה ישנם 3 סוגים של איברים:

1. $e_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\langle f,e_n\rangle e_n=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\frac{1}{\sqrt{2}}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx$$

2. $e_n = \sin nx$

$$\langle f, \sin nx \rangle \sin nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \sin nx$$

3. $e_n = \cos nx$

$$\langle f, \cos nx \rangle \cos nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cos nx$$

הגדרה 1.6 טור פוריה:
תהי $f \in E$, הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הינו טור פורייה המתאים ל־f

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad , n = 0, 1, 2, ... \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad , n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

נסמן:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \le x < \pi \\ -2 & , -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

שלבי עבודה: מציאת a_0, a_n, b_n

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2dx + \int_0^{\pi} dx\right) = -1 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\cos nxdx + \int_0^{\pi} \cos nxdx\right) = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\sin nxdx + \int_0^{\pi} \sin nxdx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & ,n\in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n}\right) = \frac{6}{n\pi} & ,n\in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

ולכן:

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)} \sin(2n-1)x$$

1.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות.

הגדרה 1.7 פונ' f הינה זוגית אם $f(-x) = f(x)$ ואי זוגית אם $f(-x) = -f(x)$.

1.1.1 תכונות:

1. זוגית = זוגית × זוגית
2. אי־זוגית = זוגית × אי־זוגית
3. זוגית = אי־זוגית × אי זוגית

כידוע אם $f(x)$ הינה אי זוגית אז לכל $b>0$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$$

ואם $f(x)$ הינה זוגית אז לכל $b>0$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^{b} f(x)\,dx$$

במקרה זה טורי פוריה מוגדרים באופן הבא:

1. עבור $f \in E$ זוגית

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \end{aligned}$$

במקרה זה הטור נקרא "טור קוסינוסים".

2. עבור $f \in E$ אי־זוגית

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned}$$

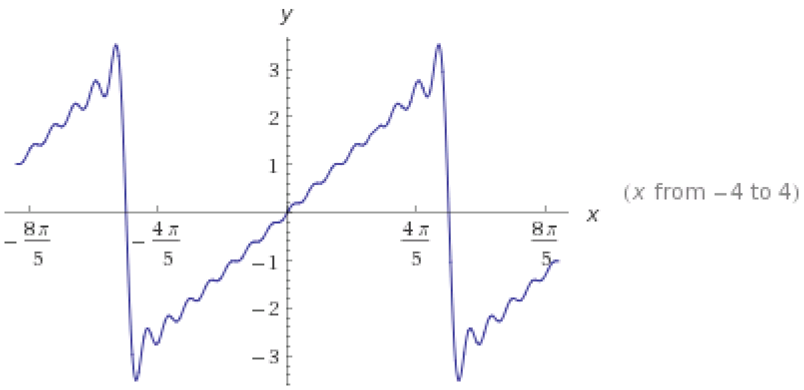
במקרה זה הטור נקרא "טור סינוסים".

דוגמא

נחשב טור פוריה של $f(x) = x$. f הינה אי זוגית $\Leftarrow$ יתקבל טור סינוסים $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{-\pi (-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$



1.1.2 תופעת גיבס ־ שגיאה בטור חלקי של טור פוריה

ננתח את הדוגמא האחרונה $f(x) = x$

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

נתבונן בקטע $[0,\pi]$ נחלק את הרקע ל־m קטעים ונבדוק מהו הערך של T_mבנקודה $x_m = \pi - \frac{\pi}{m}$

$$\begin{aligned}
T_m(x_m) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) = (*) \\
\sin n\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right) &= \sin n\pi \cos\frac{n\pi}{m} - \cos n\pi \sin\frac{n\pi}{m} \\
&= 0 - (-1)^n \sin\frac{n\pi}{m} = (-1)^{n+1} \sin\frac{n\pi}{m} \\
(*) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} (-1)^{n+1} \sin\frac{n\pi}{m} \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{2}{n} \frac{n\pi}{m} \frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}} \\
&= 2\sum_{n=1}^{m} \frac{\pi}{m} \frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}}
\end{aligned}$$

הגבול של הביטוי האחרון כאשר $m \to \infty$ הינו האינטגרל

$$2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}$$

לפי ההגדרה של סכומי רימן $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_k$

$$(*) = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} = 2\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ...\right) dx \approx 1.18\pi$$

באופן זה ניתן להאריך של השגיאה היחסית המתקבלת בנק' הקרובה לπ.

$$\frac{1.18\pi - \pi}{2\pi} \approx 0.09 = 9\%$$

הערה 1.8 ישנה טענה המכלילה את התוצאה האחרונה ולפי טענה זו, גודל השגיאה לא עולה על 9% מגודל הקפיצה בנק' אי רציפות.

תרגיל

נתון $f(x) \in E[-\pi,\pi]$, לכל $a,b,c \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$G(a,b,c) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + a + b\cos x + c\sin x|^2\,dx$$

עבור איזה ערך של a,b,c g מקבלת את ערכה המינימלי?

פתרון

ניתן לתייחס ל$G\left(a,b,c\right)$ כאל $||\ ||^2$ של ההפרש בין $f\left(x\right)$ לקירוב שלה באמצעות המערכת $\{1,\cos x,\sin x\}$, כלומר:

$$||f-\left(-a-b\cos x-c\sin x\right)||^2$$

באופן כזה נמצא את:

$$\begin{aligned}
-a &= \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx\\
-b &= \frac{\langle f,\cos x\rangle}{\langle \cos x,\cos x\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx\\
-c &= =\frac{\langle f,\sin x\rangle}{\langle \sin x,\sin x\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx
\end{aligned}$$

חלק IV

הרצאה 4

2 טורי פוריה מרוכבים

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

ביחס למ"פ זו, המערכת הבאה הינה מע' אורתונורמלית

$$\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

לפי <u>נוסחת אוילר</u> $e^{\pm inx}=\cos nx\pm i\sin nx$

טור פרויה מרוכב המתאים לפונ' $f\in E$ מוגדר באופן הבא:

$$f\left(x\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

כאשר

$$\forall n\in\mathbb{Z}\ :\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx$$

נראה שטור פוריה מרוכב שקול לטור פוריה ממשי.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nx-i\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx\right]\\
&= \frac{a_n-ib_n}{2}
\end{aligned}$$

(כאשר a_n, b_n הינם מקדמי פוריה שטור ממשי.)
לפי אותו עקרון:

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{inx}dx=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n-ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\\
\Rightarrow &\quad \begin{cases} a_n=c_n+c_{-n}\\ b_n=ic_n-c_{-n}\end{cases}\\
f\left(x\right) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right)\\
&= c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\left(\cos nx+i\sin nx\right)+c_{-n}\left(\cos nx-i\sin nx\right)\right]\\
&= c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(c_n+c_{-n}\right)\cos nx+i\left(c_n-c_{-n}\right)\sin nx\right]\\
&= \overbrace{c_0}^{\frac{a_0}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)
\end{aligned}$$

.$\left(c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\frac{a_0}{2}\right)$

דוגמא: חישוב טור פוריה מרוכב

$f\left(x\right)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}
n\neq 0:\quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xe^{-inx}dx\\
&= \begin{bmatrix} u=x & u'=1\\ v'=e^{-inx} & v=-\frac{1}{in}e^{-inx}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-x\frac{1}{in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in}+\frac{\pi e^{in\pi}}{-in}+\frac{1}{in}\left(-\frac{1}{in}\right)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}+\pi e^{in\pi}}{-in}+\frac{e^{-in\pi}-e^{in\pi}}{n^2}\right]=\frac{i\left(-1\right)^n}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} e^{-in\pi}+e^{in\pi}=\cos n\pi-i\sin n\pi+\cos n\pi+i\sin n\pi=2\cos n\pi\\ e^{-in\pi}-e^{in\pi}=\cos n\pi-i\sin n\pi-\cos n\pi-i\sin n\pi=-2i\sin n\pi=0\end{cases}$$

ולכן עבור $n\neq 0$ $c_n=\frac{i(-1)^n}{n}$.

3 התכנסות נקודתית של טורי פוריה

הגדרה 3.1 E' - מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין $f:[-\pi,\pi]:\mathbb{C}$ כך שבכל נקודה בקטע קיימות הנגזרות החד־צדדיות.

משפט 3.2 משפט דיריכלה
תהי $f\in E'$, מחזורית 2π. בכל נק', בה קיימות הנגזרות החד־צדדיות והן שוות, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס ל־$f(x)$.
בכל נק' אי רציפות, טור הפוריה, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס לממוצע הגבולות החד־צדדים, כלומר ל־$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.
במילים אחרות, אם תנאי המשפט מתקיימים $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$.

הוכחה: כלי עזר:

טענה 3.3 גרעין דיריכלה Dirichlet kernel

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+...+\cos nu=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

הוכחת הטענה:

נסמן את האגף השמאלי ב־S ונכפיל אותו ב־$2\sin\frac{u}{2}$:

$$2S\sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+2\cos u\sin\frac{u}{2}+...+2\cos nu\sin\frac{u}{2}$$

נשתמש בזהות $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

$$\Rightarrow 2S\sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}u-\sin\frac{u}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}u-\sin\frac{3}{2}u\right)+...+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u\right)$$

זהו טור טלסקופי ולכן $2S\sin\frac{u}{2}=\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)u$ ולכן $S=\frac{\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$

תכונה של גרעין דיריכלה:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}=1$$

ההתכנסות הנקודתית של טור פוריה הינה ביחס לסדרה של הסכומים החלקיים של טור פוריה. נגדיר סכום חלקי לטור פוריה:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]$$

כאשר המטרה היא להוכיח $f(x) \overset{n\to\infty}{\to} \{S_n(x)\}$. נציב את מקדמי פוריה המפורשים

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\right]\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}(t-x)\right)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}dt \end{aligned}$$

המשך ההוכחה בהרצאה הבאה. ■