

# אנליזת פורייה ויישומים

6 באוגוסט 2014

## תוכן עניינים

<b>1</b>	<b>I הרצאה 1</b>
<b>2</b>	<b>II הרצאה 2</b>
2	0.1 מרחב $L^2$ . . . . .
3	0.1.1 התכנסות בנורמה . . . . .
3	0.2 מרחב $l_p$ . . . . .
3	0.2.1 אי שוויון קושי שזורץ עבור $l_2$ . . . . .
3	0.2.2 אי שוויון הדר (Holders inequality) . . . . .
5	0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt . . . . .
5	0.3.1 פולינומי לג'נדר . . . . .
6	0.3.2 פולינומי צ'בישב . . . . .
7	0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים: . . . . .
<b>10</b>	<b>III הרצאה 3</b>
10	1 מערכת אורתונורמלית אינסופית . . . . .
13	1.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות. . . . .
13	1.1.1 תכונות: . . . . .
15	1.1.2 תופעת גיבס - שגיאה בטור חלקי של טור פוריה . . . . .
<b>16</b>	<b>IV הרצאה 4</b>
16	2 טורי פוריה מרוכבים . . . . .
18	3 התכנסות נקודתית של טורי פוריה . . . . .
20	3.0.3 שימוש במשפט . . . . .
25	4 טורי פוריה בקטעים כללים $[a, b]$ . . . . .

---

I חלק  
**1 הרצאה**

II חלק  
**2 הרצאה**

0.1 מרחב  $L^2$

$$f, g \in C[a, b]$$

נגדיר מכפלה פנימית

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \\ \|f\| &= \sqrt{\langle f, f \rangle} = \int_a^b |f|^2 dx\end{aligned}$$

**הערה 0.1** נורמה של  $f$  קיימת אם  $|f|^2$  הינה אינטגרבילית. במקרה זה ניתן להגדיר מרחק בין פונקציות ע"י  $\|f - g\|$  ( $\|f - g\| = 0 \Leftrightarrow f = g$ ).

**הגדרה 0.2**  $L^2[a, b]$  מרחב הפונקציות  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  כך ש  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ . מבחינה מעשית יש לבדוק את התנאי האחרון ולבדוק האם פונ' שייכת ל  $L^2[a, b]$ .

**דוגמא:**

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases} 1 & 1 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \|f\|^2 &= \int_0^{0.5} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow f \in L^2[a, b]\end{aligned}$$

דוגמא לפונ' שלא שייכת ל  $L^2(a, b)$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1 \\ \|f\|^2 &= \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \epsilon = \infty\end{aligned}$$

עוד דוגמא:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ -1 & else \end{cases}$$

**0.1.1 התכנסות בנורמה**

סדרת פונקציות  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  ב  $L^2(a, b)$  מתכנסת בו אם קיימת פונקציה  $f \in L^2(a, b)$  כך ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

**0.2 מרחב  $l_p$**

**הגדרה 0.3** אם  $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  הינה סדרה מתכנסת (כלומר  $\sum |\xi_n|^2 < \infty$ ).

**הגדרה 0.4** הגדרת הנורמה והמכפלה פנימית במקרה זה:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \bar{y}_i$$

**0.2.1 אי שוויון קושי שורץ עבור  $l_2$**

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |y_k|^2}$$

**הגדרה 0.5** באופן דומה עבור  $p > 1$  ניתן להגדיר מרחב  $l_p$ : אם  $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  ו  $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < \infty$ .

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**0.2.2 אי שוויון הלדר (Holders inequality)**

אם נתונות שתי סדרות  $x \in l_p, y \in l_q$  כאשר  $l_p, l_q$  מרחבים צמודים (כלומר  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ):

$$\sum_{n=1}^\infty |\xi_n| |\eta_n| \leq \left( \sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{n=1}^\infty |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**הוכחה:** ניעזר באי שוויון יונג Jung: עבור  $p, q$  צמודים  $\alpha, \beta > 0 : \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$

נסמן  $\alpha = \frac{|\xi_n|}{\|x\|_p}, \beta = \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q}$   
נציב לאי שוויון יונג:

$$\frac{|\xi_n|}{\|x\|_p} \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q} \leq \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

נעבור לסכומים:

$$\begin{aligned} \frac{\sum |\xi_n| |\eta_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{\sum |\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{\sum |\eta_n|^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &\downarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| |\eta_n| &\leq \|x\|_p \|y\|_q \end{aligned}$$

נציב את ההגדרה של נורמה ונקבל את הדרוש.

**תרגיל**

נתונה סדרה  $x = \left\{ \frac{5^n - 3^n}{7^n} \right\} \in l_2$ , נחשב את  $\|x\|_2$ :

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{\sum |\xi_n|^2} \\ \|x\|_2^2 &= \sum \left( \frac{5^n - 3^n}{7^n} \right)^2 \\ &= \sum \frac{25^n - 2 * 15^n + 9^n}{49^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{25}{49} \right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{15}{49} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{9}{49} \right)^n \\ &= \frac{\frac{25}{49}}{1 - \frac{25}{49}} - 2 \frac{\frac{15}{49}}{1 - \frac{15}{49}} + \frac{\frac{9}{49}}{1 - \frac{9}{49}} = \frac{16}{85} \\ \|x\|_2 &= \frac{4}{\sqrt{85}} \end{aligned}$$

**תרגיל:** נראה את קיום אי שוויון קושי שורץ במקרה של  $L^2$ .

**הוכחה:**

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g} dx, \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$$\left\| \frac{|f|}{\|f\|} - \frac{|g|}{\|g\|} \right\|^2 = \int_a^b \left( \frac{|f|}{\|f\|} - \frac{|g|}{\|g\|} \right)^2 dx \geq 0$$

$$\int_a^b \left( \frac{|f|^2}{\|f\|^2} - \frac{2|f||g|}{\|f\|\|g\|} + \frac{|g|^2}{\|g\|^2} \right) dx \geq 0$$

$$\int_a^b \frac{|f||g|}{\|f\|\|g\|} dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|f|^2}{\|f\|^2} dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|g|^2}{\|g\|^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

כלומר:

$$\int_a^b |f||g| dx \leq \|f\|\|g\|$$

$$\langle |f|, |g| \rangle \leq \|f\|\|g\|$$

מתכונת האינטגרציה  $\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx$  נקבל  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|\|g\|$ .

### 0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt

התהליך מייצר סדרה של וקטורים (פונל) אורתוגנליים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  מסדרה של וקטורים (פונל) בת"ל  $\{v_1, \dots, v_n\}$  כך ש  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ .  
התהליך הינו איטרטיבי:

$$\begin{aligned} \text{שלב 1: } u_1 &= v_1 \\ \text{שלב 2: } u_2 &= v_2 - \tilde{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\ &\vdots \\ \text{שלב } n: u_n &= v_n - \tilde{v}_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1} \end{aligned}$$

#### 0.3.1 פולינומי לג'נדר

$$P_n[x] = \text{Span} \left\{ x^0, \dots, x^n \right\}$$

מכפלה פנימית מוגדרת באופן הבא:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$$

$$P_0(x) = 1 = S_0(x)$$

$$P_1(x) = S_1(x) - \frac{\langle S_1, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 = S_1(x) = x$$

$$\langle S_1, P_0 \rangle = \int_{-1}^1 x * 1 dx = 0$$

$$\begin{aligned} P_2 &= S_2 - \tilde{S}_2 = S_2 - \frac{\langle S_2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 - \frac{\langle S_2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} P_1 \\ &= \frac{3x^2 - 1}{3} \end{aligned}$$

ע"מ לגרום לפולינומי לגנדר לקיים תנאי  $P_n(1) = 1$  נכתוב  $P_2 = \frac{3}{2}P_2 = \frac{3x^2-1}{2}$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{5x^3 - 3x}{2} \\ &\vdots \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left( (x^2 - 1)^n \right) \end{aligned}$$

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n P_m dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases} = \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1}$$

**0.3.2 פולינומי צ'בישב**

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\vdots \\ T_n(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n (2n-1)(2n-3)\dots 1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**תרגיל:**

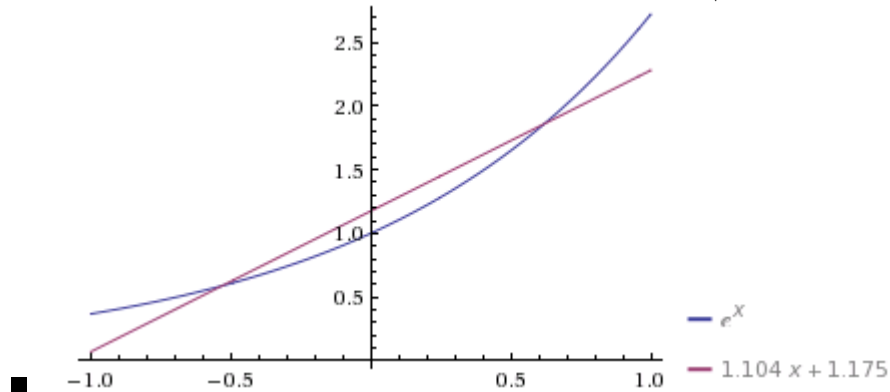
מצא קירוב ל- $f(x) = e^x$  באמצעות קו ישר בקטע  $[-1, 1]$ . **הוכחה:** נמצא היטל אורתוגונלי במרחב  $Span\{P_0(x), P_1(x)\}$

נחשב  $e^x \approx a_0 P_0 + a_1 P_1$  כאשר

$$a_0 = \frac{\langle e^x, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{1}{2} \langle e^x, 1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^x dx = 1.175$$

$$a_1 = \frac{\langle e^x, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \dots = 1.104$$

לסיכום  $e^x \approx 1.175 + 1.104x$



**הערה 0.6** בהינתן קטע כללי  $(a, b)$  נתין להגדיר מ"פ חדשה המותאמת לקטע ובאמצעותה להגדיר מערכת חדשה של פולינומים אורתוגונליים ובאמצעותה לחשב את הקירוב הדרוש. האפשרות הנוספת היא להגדיר העתקה ליניארית  $\varphi : [a, b] \rightarrow [-1, 1]$  ולהשתמש בה ואז ניתן לעבוד עם מע' אורתוגונלית קיימת.

**0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים:**

1. Laguerre

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

⋮

$$(k+1)L_{k+1}(x) - (2k+1-x)L_k(x) + kL_{k-1}(x) = 0$$

2. פולינומי הרמיט Hermite

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 H_0(x) &= 1 \\
 H_1(x) &= 2x \\
 H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
 &\vdots \\
 H_{n+1} &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

**דוגמא:**

$$x \in [0, 1], f_n(x) = x^n$$

מקרה א':  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 0 \leq x < 1$   
 מקרה ב':  $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$f_n$  מתכנסת נקודתית ל- $f$ , נבדוק התכנסות ב- $L^2[0, 1]$ .

$$\|x^n - 0\| = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר  $x^n \xrightarrow{L^2} 0$ .

**דוגמא:**

$$\begin{aligned}
 f_n &= \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ n & , 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \\
 f_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
 \|f_n - 0\|^2 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n^2 x \Big|_0^{\frac{1}{n}} = n \\
 \|f_n - 0\| &= \sqrt{n} \not\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

כלומר הסדרה לא מתכנסת ל- $f = 0$  ב- $L^2$ .



## תרגיל

מצא קירוב ל- $f(x) = 1 - x^4$  באמצעות פולינום ממעלה 2 בקטע  $[-1, 1]$ . הוכחה:

$$\tilde{f}(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

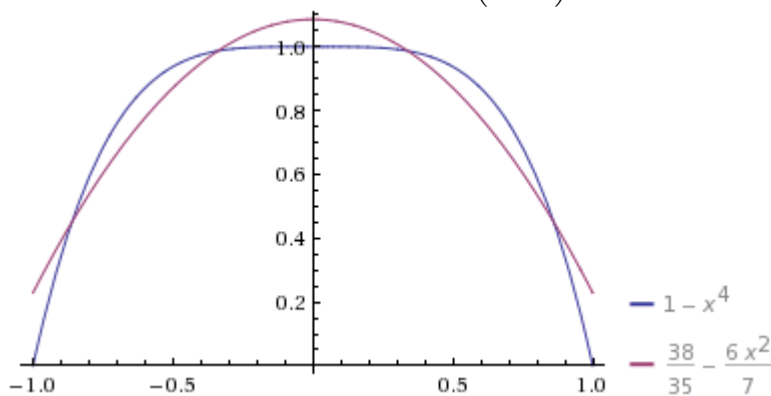
$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_i(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{4}{5}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) x dx = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) \frac{3x^2 - 1}{2} dx = -\frac{4}{7}$$

$$f(x) \approx \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \left( \frac{3x^2 - 1}{2} \right) = \frac{38 - 30x^2}{35}$$



## תרגיל

מצא קירוב ל- $f(x) = \sqrt{2x+3}$  בקטע  $[0, 2]$  באמצעות פולינום ממעלה שנייה. הוכחה: נעתיק את הפונקציה מקטע  $[0, 2]$  לקטע  $[-1, 1]$  ע"י  $x = t + 1, t = x - 1$ .

$$f(x) = \sqrt{2x+3}$$

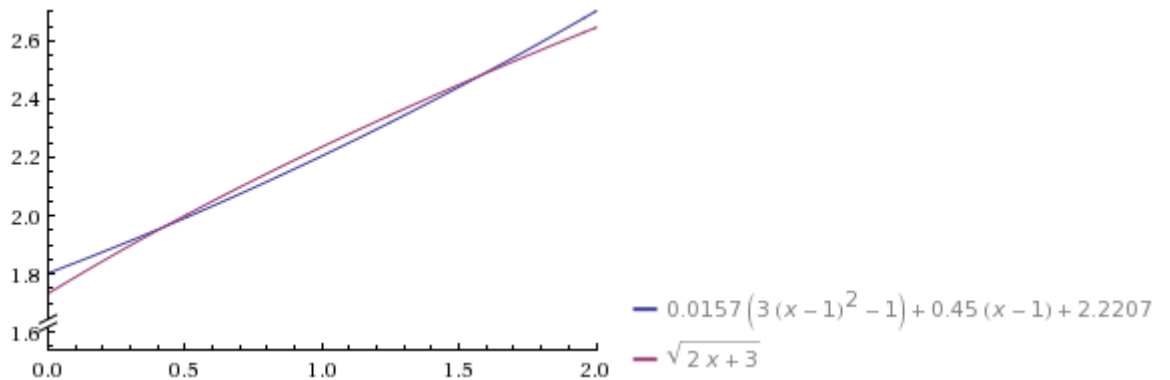
$$f(t) = \sqrt{2t+5}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 * \sqrt{2t+5} dt = 2.2207$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t * \sqrt{2t+5} dt = 0.45$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \frac{3t^2 - 1}{2} \sqrt{2t+5} dt = 0.0314$$

$$\tilde{f}(x) = 2.2207 + 0.45(x-1) + 0.0314 \frac{3(x-1)^2 - 1}{2}$$



### חלק III הרצאה 3

#### 1 מערכת אורתונורמלית אינסופית

**הגדרה 1.1** מרחב סגור

תהי  $\{e_1, e_2, \dots\}$  מע' אורתונורמלית אינסופית במרחב מ"פ  $V$ . נאמר שהמערכת הינה סגורה ב- $V$  אם לכל  $u \in V$  מתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{i=1}^m \langle u, e_i \rangle e_i \right\| = 0$$

**טענה 1.2** המע' האורתונורמלית  $\{e_1, e_2, \dots\}$  סגורה במרחב מ"פ אמ"מ לכל  $u \in V$  מתקיים השוויון

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 = \|u\|^2$$

**הערה 1.3** השוויון הנ"ל נקרא שוויון פרסבל.

**הגדרה 1.4**  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  נקראת רציפה למקוטעין, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. ל- $f$  יש לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות.

2. בכל נק' אי-רציפות קיימים הגבולות החד צדדים.

פונ' רציפה למקוטעין מגדירה מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין.

**הגדרה 1.5**  $E$  מרחב ליניארי של פונקציות הרציפות למקוטעין. נגדיר מ"פ על מרחב זה:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

נתבונן במע' האינסופית הבאה:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \right\}$$

נבדוק אורתוגונליות ונורמה של כל איבר

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x dx = 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi n} [\cos nx]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \langle \sin mx, \sin nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \end{aligned}$$

ניתן לפתור בזהות טריגונומטרית  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  או באינטגרציה בחלקים  $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$ , נפתור בדרך הראשונה.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \langle \sin mx, \cos nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \text{ (odd function)} \end{aligned}$$

**בדיקת נורמות:**

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = \left[ \frac{x}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = 1 \\ \|\sin nx\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = 1 \\ \|\cos nx\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = 1 \end{aligned}$$

ראינו כי במע' אורתונורמלית אינסופית הקרוב ל- $E$  הינו מהצורה  $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$ .

במערכת שהוגדרה ישנם 3 סוגים של איברים:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$$

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$e_n = \sin nx \quad .2$$

$$\langle f, \sin nx \rangle \sin nx = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \right) \sin nx$$

$$e_n = \cos nx \quad .3$$

$$\langle f, \cos nx \rangle \cos nx = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \right) \cos nx$$

**הגדרה 1.6** טור פוריה:  
תהי  $f \in E$ , הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הינו טור פורייה המתאים ל- $f$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

נסמן:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

**דוגמא:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < \pi \\ -2 & , -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

שלבי עבודה: מציאת  $a_0, a_n, b_n$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -2 dx + \int_0^{\pi} dx \right) = -1 \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -2 \cos nxdx + \int_0^{\pi} \cos nxdx \right) = 0 \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -2 \sin nxdx + \int_0^{\pi} \sin nxdx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - (-1)^n}{n} \right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \begin{cases} 0 & , n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{n} + \frac{2}{n} \right) = \frac{6}{n\pi} & , n \in 2\mathbb{N} - 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

ולכן:

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

### 1.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות.

הגדרה 1.7 פונ'  $f$  הינה זוגית אם  $f(-x) = f(x)$  ואי זוגית אם  $f(-x) = -f(x)$ .

#### 1.1.1 תכונות:

1. זוגית  $\times$  זוגית = זוגית

2. אי-זוגית  $\times$  זוגית = אי-זוגית

3. זוגית  $\times$  אי-זוגית = אי זוגית

כידוע אם  $f(x)$  הינה אי זוגית אז לכל  $b > 0$

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 0$$

ואם  $f(x)$  הינה זוגית אז לכל  $b > 0$

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$$

במקרה זה טורי פוריה מוגדרים באופן הבא:

1. עבור  $f \in E$  זוגית

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

במקרה זה הטור נקרא "טור קוסינוסים".

2. עבור  $f \in E$  אי-זוגית

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

במקרה זה הטור נקרא "טור סינוסים".

### דוגמא

נחשב טור פוריה של  $f(x) = x$ .  $f$  הינה אי זוגית  $\Leftrightarrow$  יתקבל טור סינוסים  $a_n = 0$ .

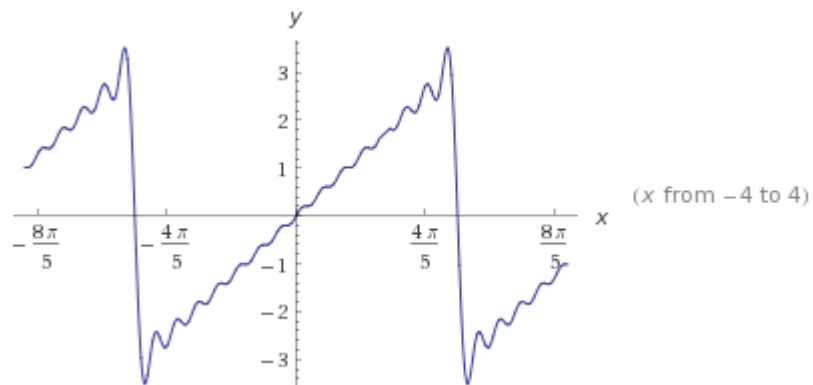
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{-\pi (-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$



**1.1.2 תופעת גיבס - שגיאה בטור חלקי של טור פוריה**

ננתח את הדוגמא האחרונה  $f(x) = x$

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

נתבונן בקטע  $[0, \pi]$  נחלק את הרקע ל- $m$  קטעים ונבדוק מהו הערך של  $T_m$  בנקודה  $x_m = \pi - \frac{\pi}{m}$

$$\begin{aligned} T_m(x_m) &= \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n \left( \pi - \frac{\pi}{m} \right) = (*) \\ \sin n \left( \pi - \frac{\pi}{m} \right) &= \sin n\pi \cos \frac{n\pi}{m} - \cos n\pi \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= 0 - (-1)^n \sin \frac{n\pi}{m} = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{m} \\ (*) &= \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= 2 \sum_{n=1}^m \frac{\sin \frac{n\pi}{m}}{n} \end{aligned}$$

הגבול של הביטוי האחרון כאשר  $m \rightarrow \infty$  הינו האינטגרל

$$2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

לפי ההגדרה של סכומי רימן  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$

$$(*) = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^\pi \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) dx \approx 1.18\pi$$

באופן זה ניתן להאריך של השגיאה היחסית המתקבלת בנק' הקרובה ל- $\pi$ .

$$\frac{1.18\pi - \pi}{2\pi} \approx 0.09 = 9\%$$

**הערה 1.8** ישנה טענה המכלילה את התוצאה האחרונה ולפי טענה זו, גודל השגיאה לא עולה על 9% מגודל הקפיצה בנק' אי רציפות.

**תרגיל**

נתון  $f(x) \in E[-\pi, \pi]$  לכל  $a, b, c \in \mathbb{C}$  נגדיר

$$G(a, b, c) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + a + b \cos x + c \sin x|^2 dx$$

עבור איזה ערך של  $a, b, c$  מקבלת את ערכה המינימלי?

**פתרון**

ניתן לתייחס ל- $G(a, b, c)$  כאל  $\| \cdot \|$  של ההפרש בין  $f(x)$  לקירוב שלה באמצעות המערכת  $\{1, \cos x, \sin x\}$ , כלומר:

$$\|f - (-a - b \cos x - c \sin x)\|^2$$

באופן כזה נמצא את:

$$\begin{aligned} -a &= \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ -b &= \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx \\ -c &= \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx \end{aligned}$$

## חלק IV הרצאה 4

### 2 טורי פוריה מרוכבים

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

ביחס למ"פ זו, המערכת הבאה הינה מע' אורתונורמלית

$$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

לפי נוסחת אוילר  $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$  טור פוריה מרוכב המתאים לפונ'  $f \in E$  מוגדר באופן הבא:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

כאשר

$$\forall n \in \mathbb{Z} : c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

נראה שטור פוריה מרוכב שקול לטור פוריה ממשי.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \right] \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} \end{aligned}$$



(כאשר  $a_n, b_n$  הינם מקדמי פוריה שטור ממשי.)  
לפי אותו עקרון:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = ic_n - c_{-n} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n (\cos nx + i \sin nx) + c_{-n} (\cos nx - i \sin nx)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx] \\ &= \underbrace{c_0}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

$$\cdot \left( c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \right)$$

**דוגמא: חישוב טור פוריה מרוכב**

$f(x) = x$  בקטע  $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} n \neq 0: c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-inx} \quad v = -\frac{1}{in} e^{-inx} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -x \frac{1}{in} e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \frac{\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{1}{in} \left( -\frac{1}{in} \right) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{n^2} \right] = \frac{i(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} e^{-in\pi} + e^{in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi + \cos n\pi + i \sin n\pi = 2 \cos n\pi \\ e^{-in\pi} - e^{in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi - \cos n\pi - i \sin n\pi = -2i \sin n\pi = 0 \end{cases}$$

$$.c_n = \frac{i(-1)^n}{n} \quad n \neq 0 \text{ ולכן עבור } n \neq 0$$

### 3 התכנסות נקודתית של טורי פוריה

**3.1 הגדרה**  $E'$  - מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין  $\mathbb{C} : [-\pi, \pi] : f$  כך שבכל נקודה בקטע קיימות הנגזרות החד-צדדיות.

**משפט 3.2** משפט דיריכלה

תהי  $f \in E'$ , מחזורית  $2\pi$ . בכל נק', בה קיימות הנגזרות החד-צדדיות והן שוות, טור הפוריה של  $f(x)$  מתכנס ל- $f(x)$ .

בכל נק' אי רציפות, טור הפוריה, טור הפוריה של  $f(x)$  מתכנס למוצע הגבולות החד-צדדים, כלומר ל- $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ .

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

במילים אחרות, אם תנאי המשפט מתקיימים

**הוכחה:** כלי עזר:

**3.3 טענה** גרעין דיריכלה Dirichlet kernel

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

**הוכחת הטענה:**

נסמן את האגף השמאלי ב- $S$  ונכפיל אותו ב- $2 \sin \frac{u}{2}$ :

$$2S \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u}{2} + 2 \cos u \sin \frac{u}{2} + \dots + 2 \cos nu \sin \frac{u}{2}$$

נשתמש בזהות  $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

$$\Rightarrow 2S \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u}{2} + \left( \sin \frac{3}{2}u - \sin \frac{u}{2} \right) + \left( \sin \frac{5}{2}u - \sin \frac{3}{2}u \right) + \dots + \left( \sin \left( n + \frac{1}{2} \right)u - \sin \left( n - \frac{1}{2} \right)u \right)$$

$$S = \frac{\sin\left(u + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad \text{ולכן} \quad 2S \sin \frac{u}{2} = \sin\left(u + \frac{1}{2}\right)u$$

**תכונה של גרעין דיריכלה:**

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 1$$

ההתכנסות הנקודתית של טור פוריה הינה ביחס לסדרה של הסכומים החלקיים של טור פוריה. נגדיר סכום חלקי לטור פוריה:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

כאשר המטרה היא להוכיח  $\{S_n(x)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ . נציב את מקדמי פוריה המפורשים

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right]}{2 \sin \left[ \frac{1}{2} (t-x) \right]} dt \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = t-x \\ du = dt \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+t) \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \sin \frac{1}{2} u} du \end{aligned}$$

$f(x+u)$  הינה פונ' מחזורית וגם  $\frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{1}{2} u}$  הינה מחזורית  $(2\pi)$ . האינטרוול  $[-\pi-x, \pi-x]$  גם כן באורך  $2\pi$  ולכן

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \sin \frac{1}{2} u} du$$

לפי תכונת גרעין דיריכלה:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{1}{2} u} du = 1$$

נכפיל את שני האגפים ב  $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{1}{2} u} du$$

כלומר ע"מ להוכיח את ההתכנסות  $\{S_n(x)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  עלינו להוכיח את הדבר הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - f(x)) \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{1}{2} u} du = 0$$

### למה 3.4 למת רימן לבג

לכל  $f(x)$  אינטגרבילית בהחלט מתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos mx dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin mx dx = 0$$

(כאשר  $m$  לא הבכרח טבעית)

נגדיר פונקציה  $\varphi$  באופן הבא:

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

ניתן לראות ש  $\varphi(u)$  הינה אינטגרבילית בהחלט כמכפלה של פונ' אינטגר' בהחלט ופונקציה חסומה ולכן לפי למת לבג מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u du = 0$$

■

### 3.0.3 שימוש במשפט

#### דוגמא

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

נציב  $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin \left( n \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}$$

#### תרגיל

נחשב טור פוריה של  $x^2$ :

$x^2$  הינה פונ' זוגית בקטע  $[-\pi, \pi]$  ולכן  $b_n = 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \left[ \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos nx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] \\ &= \left[ \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[ 0 - \frac{2}{n} \left( -x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} dx \right) \right] \\ &= \frac{4}{n\pi} \left[ -\pi \frac{(-1)^n}{n} \right] = \frac{4(-1)^n}{n^2} \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

לסיכום:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

**הכנס גרף**

נשתמש בטור האחרון ונציב  $x = \pi$ :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

נציב  $x = 0$ :

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

**משפט 3.5** התכנסות במ"ש של טור פוריה לפונקציה  
 אם  $f$  רציפה בקטע  $[-\pi, \pi]$  ו- $f(-\pi) = f(\pi)$  ו- $f' \in E$ , אז טור פוריה של  $f$  מתכנס  
 במ"ש ל- $f$  על כל הקטע. **הוכחה:**  $f' \in E$  כלומר  $f$  בעלת טור פוריה.

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx]$$

גם ל- $f(x)$  יש טור פוריה:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

נמצא מהו הקשר בין מקדמי פוריה של  $f$  ומקדמי פוריה של  $f'$ .

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \\ &= \left[ \begin{array}{ll} u = \cos nx & u' = -n \sin nx \\ v' = f' & v = f \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( f(\pi) (-1)^n - \overbrace{f(-\pi)}^{=f(\pi)} (-1)^n + nb_n \right) \end{aligned}$$

עבור  $n = 0$   $\alpha_0 = 0$  ובאופן כללי  $\alpha_n = nb_n$ . באותו אופן:

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = -na_n$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n \cos nx - na_n \sin nx]$$

**הערה 3.6** אי שוויון בסל עבור טור פוריה:  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$  כאשר  $c_k = \langle f, u_k \rangle$ .

במקרה שלנו עבור  $e_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} a_0 \right|^2 = \frac{|a_0|^2}{2}$$

עבור  $e_n = \cos nx$

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = |a_n|^2$$

ובאופן דומה עבור  $e_n = \sin nx$

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = |b_n|^2$$

ולסיכום אי-שוויון בסל עבור טור פוריה מוגדר באופן הבא:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [ |a_n|^2 + |b_n|^2 ] \leq \|f\|^2$$

נראה שטור פוריה של  $f(x)$  מתכנס במ"ש.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

$$\left[ \begin{array}{l} |a_n \cos nx| \leq |a_n| \\ |b_n \sin nx| \leq |b_n| \\ |a_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \\ |b_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \end{array} \right]$$

$$\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

נראה שהטור האחרון מתכנס.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2 + \left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)} \\ &\stackrel{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)} \end{aligned}$$

לפי אי שוויון בסל  $\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)$  ומצאנו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  בנוסף לכך שידוע שהוא מתכנס ולכן בסה"כ לפי מבחן ההשוואה של וירשטראס הטור שלנו מתכנס במ"ש. ■

### טענה 3.7 שוויון פרסבל

לכל  $f \in E$  מתקיים השוויון הבא:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

כאשר  $a_n, b_n$  מקדמי פוריה של  $f$ .

### שימוש בשוויון פרסבל - דוגמא

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx &= \frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2\pi^5}{5} \right] = \frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} &= \frac{8\pi^4}{45} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

**טענה 3.8** הגרסה המרוכבת של שוויון פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

כאשר  $f \in E$  ו  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  הינו טור פוריה המרוכב של  $f(x)$ .

**תרגיל**

1. מצאו טור פוריה מרוכב של  $e^x$ .

2. מצאו את  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ .

**פתרון**

1.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{(1-in)x}}{1-in} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{(in-1)\pi}}{2\pi(1-in)} \\ &= \frac{[e^{\pm in\pi} = (-1)^n]}{2\pi(1-in)} \\ &= \frac{(-1)^n [e^\pi - e^{-\pi}]}{2\pi(1-in)} \end{aligned}$$

$$e^x \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n [e^\pi - e^{-\pi}]}{2\pi(1-in)} e^{inx}$$

2.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{2x}}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi}$$

מצד שני

$$\sum |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e^\pi - e^{-\pi})^2}{4\pi^2 |1-in|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e^\pi - e^{-\pi})^2}{4\pi^2 (1+n^2)}$$

ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{4\pi} \frac{4\pi}{(e^\pi - e^{-\pi})^2} = \frac{\pi(e^\pi + e^{-\pi})}{e^\pi - e^{-\pi}} (= \pi \coth \pi)$$



4 טורי פוריה בקטעים כללים  $[a, b]$ 

הגדרה 4.1  $E[a, b]$  מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין המקבלות ערכים ב.C.

הגדרה 4.2 מכפלה פנימית:

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

המערכת האורתונורמלית המתאימה היא:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right), \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

## מקדמי פוריה

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx \end{aligned}$$

## מקדמי פוריה עבור מרוכבים

$$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i \frac{2n\pi x}{b-a}} dx$$

באופן דומה ניתן לגדיר את האיברים האחרונים עבור קטע כללי סימטרי סביב 0  $[-L, L]$ .

במקרה זה טור פוריה נראה כך:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

## תרגיל

חשב טור פוריה של  $f(x) = x^2$  בקטע  $[0, 2\pi]$ .

**פתרון**

$$a_0 = \frac{2}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \dots = \frac{4}{n^2}$$