

אנליזת פורייה ויישומים

6 באוגוסט 2014

תוכן עניינים

| | |
|-----------|---|
| 1 | I הרצאה 1 |
| 2 | II הרצאה 2 |
| 2 | 0.1 מרחב L^2 |
| 3 | 0.1.1 התכנסות בנורמה |
| 3 | 0.2 מרחב l_p |
| 3 | 0.2.1 אי שוויון קושי שזורץ עבור l_2 |
| 3 | 0.2.2 אי שוויון הולדר (Holders inequality) |
| 5 | 0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt |
| 5 | 0.3.1 פולינומי לג'נדר |
| 6 | 0.3.2 פולינומי צ'בישב |
| 7 | 0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים: |
| 10 | III הרצאה 3 |
| 10 | 1 מערכת אורתונורמלית אינסופית |
| 13 | 1.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות. |
| 13 | 1.1.1 תכונות: |
| 15 | 1.1.2 תופעת גיבס - שגיאה בטור חלקי של טור פוריה |
| 16 | IV הרצאה 4 |
| 16 | 2 טורי פוריה מרוכבים |
| 18 | 3 התכנסות נקודתית של טורי פוריה |
| 20 | 3.0.3 שימוש במשפט |
| 23 | V הרצאה 5 |
| 25 | 4 טורי פוריה בקטעים כללים $[a, b]$ |

I חלק
1 הרצאה

II חלק
2 הרצאה

0.1 מרחב L^2

$$f, g \in C[a, b]$$

נגדיר מכפלה פנימית

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \\ \|f\| &= \sqrt{\langle f, f \rangle} = \int_a^b |f|^2 dx\end{aligned}$$

הערה 0.1 נורמה של f קיימת אם $|f|^2$ הינה אינטגרבילית. במקרה זה ניתן להגדיר מרחק בין פונקציות ע"י $\|f - g\|$ ($\|f - g\| = 0 \Leftrightarrow f = g$).

הגדרה 0.2 $L^2[a, b]$ מרחב הפונקציות $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. מבחינה מעשית יש לבדוק את התנאי האחרון ולבדוק האם פונ' שייכת ל $L^2[a, b]$.

דוגמא:

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases} 1 & 1 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \|f\|^2 &= \int_0^{0.5} dx = \frac{1}{2} \Rightarrow f \in L^2[a, b]\end{aligned}$$

דוגמא לפונ' שלא שייכת ל $L^2(a, b)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1 \\ \|f\|^2 &= \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \epsilon = \infty\end{aligned}$$

עוד דוגמא:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ -1 & else \end{cases}$$

0.1.1 התכנסות בנורמה

סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ב $L^2(a, b)$ מתכנסת בו אם קיימת פונקציה $f \in L^2(a, b)$ כך ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

0.2 מרחב l_p

הגדרה 0.3 אם $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ הינה סדרה מתכנסת (כלומר $\sum |\xi_n|^2 < \infty$).

הגדרה 0.4 הגדרת הנורמה והמכפלה פנימית במקרה זה:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \bar{y}_i$$

0.2.1 אי שוויון קושי שורץ עבור l_2

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |y_k|^2}$$

הגדרה 0.5 באופן דומה עבור $p > 1$ ניתן להגדיר מרחב l_p : אם $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ ו $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < \infty$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

0.2.2 אי שוויון הלדר (Holders inequality)

אם נתונות שתי סדרות $x \in l_p, y \in l_q$ כאשר l_p, l_q מרחבים צמודים (כלומר $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$):

$$\sum_{n=1}^\infty |\xi_n| |\eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\eta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

הוכחה: ניעזר באי שוויון יונג Jung: עבור p, q צמודים $\alpha\beta > 0 : \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$

נסמן $\alpha = \frac{|\xi_n|}{\|x\|_p}, \beta = \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q}$
נציב לאי שוויון יונג:

$$\frac{|\xi_n|}{\|x\|_p} \frac{|\eta_n|}{\|y\|_q} \leq \frac{|\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{|\eta_n|^q}{\|y\|_q^q}$$

נעבור לסכומים:

$$\begin{aligned} \frac{\sum |\xi_n| |\eta_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \frac{\sum |\xi_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{\sum |\eta_n|^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &\downarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| |\eta_n| &\leq \|x\|_p \|y\|_q \end{aligned}$$

נציב את ההגדרה של נורמה ונקבל את הדרוש.

תרגיל

נתונה סדרה $x = \left\{ \frac{5^n - 3^n}{7^n} \right\} \in l_2$, נחשב את $\|x\|_2$:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{\sum |\xi_n|^2} \\ \|x\|_2^2 &= \sum \left(\frac{5^n - 3^n}{7^n} \right)^2 \\ &= \sum \frac{25^n - 2 * 15^n + 9^n}{49^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{25}{49} \right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15}{49} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{49} \right)^n \\ &= \frac{\frac{25}{49}}{1 - \frac{25}{49}} - 2 \frac{\frac{15}{49}}{1 - \frac{15}{49}} + \frac{\frac{9}{49}}{1 - \frac{9}{49}} = \frac{16}{85} \\ \|x\|_2 &= \frac{4}{\sqrt{85}} \end{aligned}$$

תרגיל: נראה את קיום אי שוויון קושי שורץ במקרה של L^2 .

הוכחה:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g} dx, \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

$$\left\| \frac{|f|}{\|f\|} - \frac{|g|}{\|g\|} \right\|^2 = \int_a^b \left(\frac{|f|}{\|f\|} - \frac{|g|}{\|g\|} \right)^2 dx \geq 0$$

$$\int_a^b \left(\frac{|f|^2}{\|f\|^2} - \frac{2|f||g|}{\|f\|\|g\|} + \frac{|g|^2}{\|g\|^2} \right) dx \geq 0$$

$$\int_a^b \frac{|f||g|}{\|f\|\|g\|} dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|f|^2}{\|f\|^2} dx + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|g|^2}{\|g\|^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

כלומר:

$$\int_a^b |f||g| dx \leq \|f\|\|g\|$$

$$\langle |f|, |g| \rangle \leq \|f\|\|g\|$$

■ מתכונת האינטגרציה $\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx$ נקבל $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|\|g\|$.

0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt

התהליך מייצר סדרה של וקטורים (פונל) אורתוגנליים $\{u_1, \dots, u_n\}$ מסדרה של וקטורים (פונל) בת"ל $\{v_1, \dots, v_n\}$ כך ש $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$.
התהליך הינו איטרטיבי:

$$\begin{aligned} \text{שלב 1: } u_1 &= v_1 \\ \text{שלב 2: } u_2 &= v_2 - \tilde{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \\ &\vdots \\ \text{שלב } n: u_n &= v_n - \tilde{v}_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1} \end{aligned}$$

0.3.1 פולינומי לג'נדר

$$P_n[x] = \text{Span} \left\{ x^0, \dots, x^n \right\}$$

מכפלה פנימית מוגדרת באופן הבא:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$$

$$P_0(x) = 1 = S_0(x)$$

$$P_1(x) = S_1(x) - \frac{\langle S_1, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 = S_1(x) = x$$

$$\langle S_1, P_0 \rangle = \int_{-1}^1 x * 1 dx = 0$$

$$\begin{aligned} P_2 &= S_2 - \tilde{S}_2 = S_2 - \frac{\langle S_2, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 - \frac{\langle S_2, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} P_1 \\ &= \frac{3x^2 - 1}{3} \end{aligned}$$

ע"מ לגרום לפולינומי לגנדר לקיים תנאי $P_n(1) = 1$ נכתוב $P_2 = \frac{3}{2}P_2 = \frac{3x^2-1}{2}$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3x^2 - 1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{5x^3 - 3x}{2} \\ &\vdots \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right) \end{aligned}$$

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n P_m dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases} = \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1}$$

0.3.2 פולינומי צ'בישב

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\vdots \\ T_n(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n (2n-1)(2n-3)\dots 1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

תרגיל:

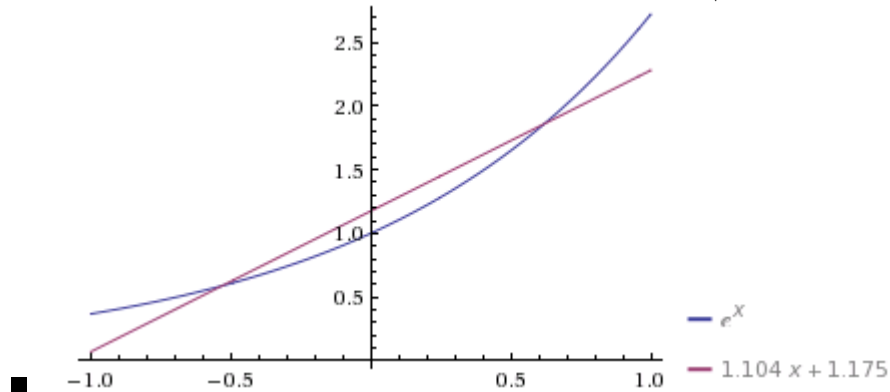
מצא קירוב ל $f(x) = e^x$ באמצעות קו ישר בקטע $[-1, 1]$. **הוכחה:** נמצא היטל אורתוגונלי במרחב $Span\{P_0(x), P_1(x)\}$

נחשב $e^x \approx a_0 P_0 + a_1 P_1$ כאשר

$$a_0 = \frac{\langle e^x, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \frac{1}{2} \langle e^x, 1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^x dx = 1.175$$

$$a_1 = \frac{\langle e^x, P_1 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} = \dots = 1.104$$

לסיכום $e^x \approx 1.175 + 1.104x$



הערה 0.6 בהינתן קטע כללי (a, b) נתין להגדיר מ"פ חדשה המותאמת לקטע ובאמצעותה להגדיר מערכת חדשה של פולינומים אורתוגונליים ובאמצעותה לחשב את הקירוב הדרוש. האפשרות הנוספת היא להגדיר העתקה ליניארית $\varphi : [a, b] \rightarrow [-1, 1]$ ולהשתמש בה ואז ניתן לעבוד עם מע' אורתוגונלית קיימת.

0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים:

1. Laguerre

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

⋮

$$(k+1)L_{k+1}(x) - (2k+1-x)L_k(x) + kL_{k-1}(x) = 0$$

2. פולינומי הרמיט Hermite

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 H_0(x) &= 1 \\
 H_1(x) &= 2x \\
 H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
 &\vdots \\
 H_{n+1} &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

דוגמא:

$$x \in [0, 1], f_n(x) = x^n$$

מקרה א': $0 \leq x < 1$, $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 מקרה ב': $x = 1$, $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

f_n מתכנסת נקודתית ל- f , נבדוק התכנסות ב- $L^2[0, 1]$.

$$\|x^n - 0\| = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כלומר $x^n \xrightarrow{L^2} 0$.

דוגמא:

$$f_n = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ n & , 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|f_n - 0\|^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n^2 x \Big|_0^{\frac{1}{n}} = n$$

$$\|f_n - 0\| = \sqrt{n} \not\rightarrow 0$$

כלומר הסדרה לא מתכנסת ל- $f = 0$ ב- L^2 .

תרגיל

מצא קירוב ל- $f(x) = 1 - x^4$ באמצעות פולינום ממעלה 2 בקטע $[-1, 1]$. הוכחה:

$$\tilde{f}(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

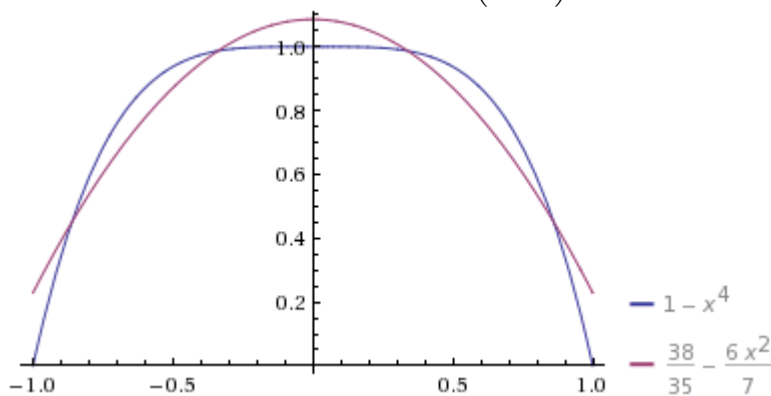
$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_i(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{4}{5}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) x dx = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) \frac{3x^2 - 1}{2} dx = -\frac{4}{7}$$

$$f(x) \approx \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) = \frac{38 - 30x^2}{35}$$



תרגיל

מצא קירוב ל- $f(x) = \sqrt{2x+3}$ בקטע $[0, 2]$ באמצעות פולינום ממעלה שנייה. הוכחה: נעתיק את הפונקציה מקטע $[0, 2]$ לקטע $[-1, 1]$ ע"י $x = t + 1, t = x - 1$.

$$f(x) = \sqrt{2x+3}$$

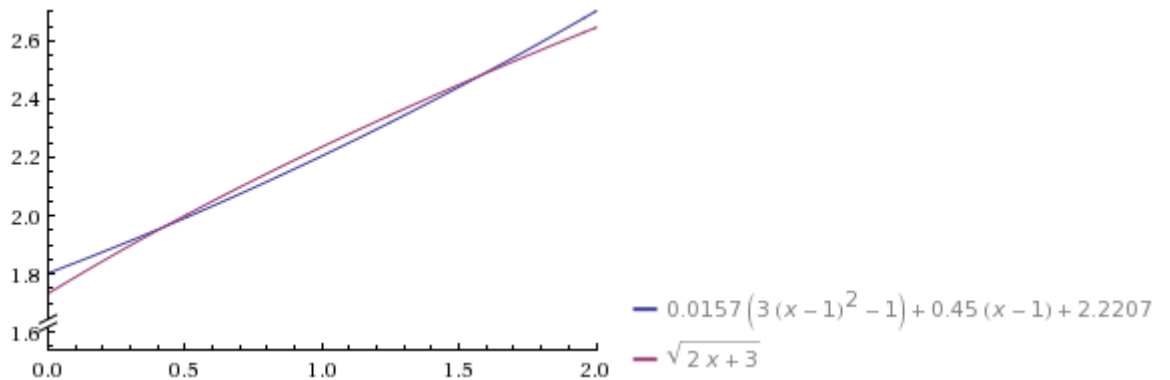
$$f(t) = \sqrt{2t+5}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 * \sqrt{2t+5} dt = 2.2207$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t * \sqrt{2t+5} dt = 0.45$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \frac{3t^2 - 1}{2} \sqrt{2t+5} dt = 0.0314$$

$$\tilde{f}(x) = 2.2207 + 0.45(x-1) + 0.0314 \frac{3(x-1)^2 - 1}{2}$$



חלק III

הרצאה 3

1 מערכת אורתונורמלית אינסופית

הגדרה 1.1 מרחב סגור תהי $\{e_1, e_2, \dots\}$ מע' אורתונורמלית אינסופית במרחב מ"פ V . נאמר שהמערכת הינה סגורה ב- V אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{i=1}^m \langle u, e_i \rangle e_i \right\| = 0$$

טענה 1.2 המע' האורתונורמלית $\{e_1, e_2, \dots\}$ סגורה במרחב מ"פ אמ"מ לכל $u \in V$ מתקיים השוויון

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 = \|u\|^2$$

הערה 1.3 השוויון הנ"ל נקרא שוויון פרסבל.

הגדרה 1.4 $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת רציפה למקוטעין, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. ל- f יש לכל היותר מספר סופי של נקודות אי-רציפות.

2. בכל נק' אי-רציפות קיימים הגבולות החד צדדים.

פונ' רציפה למקוטעין מגדירה מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין.

הגדרה 1.5 E מרחב ליניארי של פונקציות הרציפות למקוטעין. נגדיר מ"פ על מרחב זה:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

נתבונן במע' האינסופית הבאה:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \right\}$$

נבדוק אורתוגונליות ונורמה של כל איבר

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x dx = 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi n} [\cos nx]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \langle \sin mx, \sin nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \end{aligned}$$

ניתן לפתור בזהות טריגונומטרית $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ או באינטגרציה בחלקים $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$, נפתור בדרך הראשונה.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \langle \sin mx, \cos nx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \text{ (odd function)} \end{aligned}$$

בדיקת נורמות:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = \left[\frac{x}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = 1 \\ \|\sin nx\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = 1 \\ \|\cos nx\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = 1 \end{aligned}$$

ראינו כי במע' אורתונורמלית אינסופית הקרוב ל- E הינו מהצורה $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$.

במערכת שהוגדרה ישנם 3 סוגים של איברים:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$$

$$\langle f, e_n \rangle e_n = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$e_n = \sin nx \quad .2$$

$$\langle f, \sin nx \rangle \sin nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \right) \sin nx$$

$$e_n = \cos nx \quad .3$$

$$\langle f, \cos nx \rangle \cos nx = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \right) \cos nx$$

הגדרה 1.6 טור פוריה:
תהי $f \in E$, הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הינו טור פורייה המתאים ל- f

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad , n = 1, 2, 3, \dots$$

נסמן:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < \pi \\ -2 & , -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

שלבי עבודה: מציאת a_0, a_n, b_n

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -2 dx + \int_0^{\pi} dx \right) = -1 \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -2 \cos nxdx + \int_0^{\pi} \cos nxdx \right) = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -2 \sin nxdx + \int_0^{\pi} \sin nxdx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n} \right) = \begin{cases} 0 & , n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{n} + \frac{2}{n} \right) = \frac{6}{n\pi} & , n \in 2\mathbb{N} - 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

ולכן:

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

1.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות.

הגדרה 1.7 פונ' f הינה זוגית אם $f(-x) = f(x)$ ואי זוגית אם $f(-x) = -f(x)$.

1.1.1 תכונות:

1. זוגית \times זוגית = זוגית

2. אי-זוגית \times זוגית = אי-זוגית

3. זוגית \times אי-זוגית = אי זוגית

כידוע אם $f(x)$ הינה אי זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 0$$

ואם $f(x)$ הינה זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx$$

במקרה זה טורי פוריה מוגדרים באופן הבא:

1. עבור $f \in E$ זוגית

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

במקרה זה הטור נקרא "טור קוסינוסים".

2. עבור $f \in E$ אי-זוגית

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

במקרה זה הטור נקרא "טור סינוסים".

דוגמא

נחשב טור פוריה של $f(x) = x$. f הינה אי זוגית \Leftrightarrow יתקבל טור סינוסים $a_n = 0$.

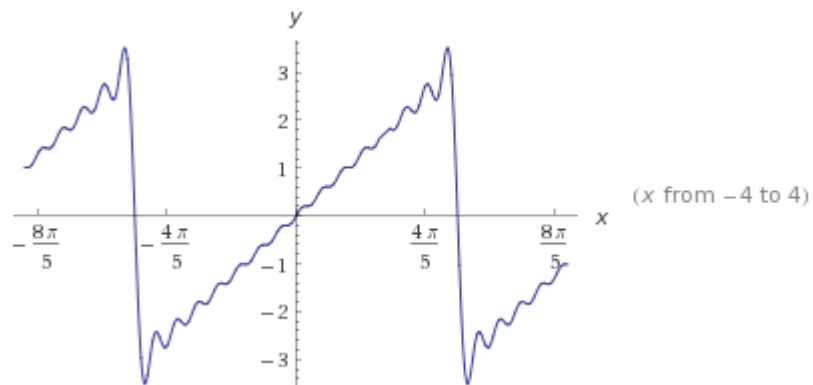
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{-\pi (-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$



1.1.2 תופעת גיבס - שגיאה בטור חלקי של טור פוריה

ננתח את הדוגמא האחרונה $f(x) = x$

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

נתבונן בקטע $[0, \pi]$ נחלק את הרקע ל- m קטעים ונבדוק מהו הערך של T_m בנקודה $x_m = \pi - \frac{\pi}{m}$

$$\begin{aligned} T_m(x_m) &= \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n \left(\pi - \frac{\pi}{m} \right) = (*) \\ \sin n \left(\pi - \frac{\pi}{m} \right) &= \sin n\pi \cos \frac{n\pi}{m} - \cos n\pi \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= 0 - (-1)^n \sin \frac{n\pi}{m} = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{m} \\ (*) &= \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1}}{n} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{m} \\ &= 2 \sum_{n=1}^m \frac{\sin \frac{n\pi}{m}}{n} \end{aligned}$$

הגבול של הביטוי האחרון כאשר $m \rightarrow \infty$ הינו האינטגרל

$$2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$$

לפי ההגדרה של סכומי רימן $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$

$$(*) = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^\pi \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) dx \approx 1.18\pi$$

באופן זה ניתן להאריך של השגיאה היחסית המתקבלת בנק' הקרובה ל- π .

$$\frac{1.18\pi - \pi}{2\pi} \approx 0.09 = 9\%$$

הערה 1.8 ישנה טענה המכלילה את התוצאה האחרונה ולפי טענה זו, גודל השגיאה לא עולה על 9% מגודל הקפיצה בנק' אי רציפות.

תרגיל

נתון $f(x) \in E[-\pi, \pi]$ לכל $a, b, c \in \mathbb{C}$ נגדיר

$$G(a, b, c) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + a + b \cos x + c \sin x|^2 dx$$

עבור איזה ערך של a, b, c מקבלת את ערכה המינימלי?

פתרון

ניתן לתייחס ל- $G(a, b, c)$ כאל $\| \cdot \|^2$ של ההפרש בין $f(x)$ לקירוב שלה באמצעות המערכת $\{1, \cos x, \sin x\}$, כלומר:

$$\|f - (-a - b \cos x - c \sin x)\|^2$$

באופן כזה נמצא את:

$$\begin{aligned} -a &= \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ -b &= \frac{\langle f, \cos x \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx \\ -c &= \frac{\langle f, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx}{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx \end{aligned}$$

חלק IV הרצאה 4

2 טורי פוריה מרוכבים

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

ביחס למ"פ זו, המערכת הבאה הינה מע' אורתונורמלית

$$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

לפי נוסחת אוילר $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$ טור פוריה מרוכב המתאים לפונ' $f \in E$ מוגדר באופן הבא:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

כאשר

$$\forall n \in \mathbb{Z} : c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

נראה שטור פוריה מרוכב שקול לטור פוריה ממשי.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \right] \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} \end{aligned}$$

(כאשר a_n, b_n הינם מקדמי פוריה שטור ממשי.)
לפי אותו עקרון:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = ic_n - c_{-n} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n (\cos nx + i \sin nx) + c_{-n} (\cos nx - i \sin nx)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx] \\ &= \underbrace{c_0}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

$$\cdot \left(c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \right)$$

דוגמא: חישוב טור פוריה מרוכב

$f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} n \neq 0: c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = e^{-inx} \quad v = -\frac{1}{in} e^{-inx} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-x \frac{1}{in} e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \frac{\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{1}{in} \left(-\frac{1}{in} \right) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{n^2} \right] = \frac{i(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} e^{-in\pi} + e^{in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi + \cos n\pi + i \sin n\pi = 2 \cos n\pi \\ e^{-in\pi} - e^{in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi - \cos n\pi - i \sin n\pi = -2i \sin n\pi = 0 \end{cases}$$

$$.c_n = \frac{i(-1)^n}{n} \quad n \neq 0 \text{ ולכן עבור } n \neq 0$$

3 התכנסות נקודתית של טורי פוריה

3.1 הגדרה E' - מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין $\mathbb{C} : [-\pi, \pi] : f$ כך שבכל נקודה בקטע קיימות הנגזרות החד-צדדיות.

משפט 3.2 משפט דיריכלה

תהי $f \in E'$, מחזורית 2π . בכל נק', בה קיימות הנגזרות החד-צדדיות והן שוות, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס ל- $f(x)$.

בכל נק' אי רציפות, טור הפוריה, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס למוצע הגבולות החד-צדדים, כלומר ל- $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

במילים אחרות, אם תנאי המשפט מתקיימים

הוכחה: כלי עזר:

3.3 טענה גרעין דיריכלה Dirichlet kernel

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

הוכחת הטענה:

נסמן את האגף השמאלי ב- S ונכפיל אותו ב- $2 \sin \frac{u}{2}$:

$$2S \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u}{2} + 2 \cos u \sin \frac{u}{2} + \dots + 2 \cos nu \sin \frac{u}{2}$$

נשתמש בזהות $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

$$\Rightarrow 2S \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u}{2} + \left(\sin \frac{3}{2}u - \sin \frac{u}{2} \right) + \left(\sin \frac{5}{2}u - \sin \frac{3}{2}u \right) + \dots + \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right)u - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right)u \right)$$

$$S = \frac{\sin\left(u + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad \text{ולכן} \quad 2S \sin \frac{u}{2} = \sin \left(u + \frac{1}{2} \right) u$$

תכונה של גרעין דיריכלה:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 1$$

ההתכנסות הנקודתית של טור פוריה הינה ביחס לסדרה של הסכומים החלקיים של טור פוריה. נגדיר סכום חלקי לטור פוריה:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

כאשר המטרה היא להוכיח $\{S_n(x)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. נציב את מקדמי פוריה המפורשים

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \left[(n + \frac{1}{2})(t-x) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2}(t-x) \right]} dt \\ &= \left[\begin{array}{l} u = t-x \\ du = dt \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+t) \frac{\sin \left[(n + \frac{1}{2})u \right]}{2 \sin \frac{1}{2}u} du \end{aligned}$$

$f(x+u)$ הינה פונ' מחזורית וגם $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$ הינה מחזורית (2π) . האינטרוול $[-\pi-x, \pi-x]$ גם כן באורך 2π ולכן

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) \frac{\sin \left[(n + \frac{1}{2})u \right]}{2 \sin \frac{1}{2}u} du$$

לפי תכונת גרעין דיריכלה:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 1$$

נכפיל את שני האגפים ב $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

כלומר ע"מ להוכיח את ההתכנסות $\{S_n(x)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ עלינו להוכיח את הדבר הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+u) - f(x)) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = 0$$

למה 3.4 למת רימן לבג

לכל $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט מתקיים

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos mxdx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin mxdx = 0$$

(כאשר m לא הבכרח טבעית)

נגדיר פונקציה φ באופן הבא:

$$\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} = \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

ניתן לראות ש $\varphi(u)$ הינה אינטגרבילית בהחלט כמכפלה של פונ' אינטגר' בהחלט ופונקציה חסומה ולכן לפי למת לבג מתקיים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) u du = 0$$

■

3.0.3 שימוש במשפט

דוגמא

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

נציב $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}$$

תרגיל

נחשב טור פוריה של x^2 :

x^2 הינה פונ' זוגית בקטע $[-\pi, \pi]$ ולכן $b_n = 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos nx & v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[0 - \frac{2}{n} \left(-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} dx \right) \right] \\ &= \frac{4}{n\pi} \left[-\pi \frac{(-1)^n}{n} \right] = \frac{4(-1)^n}{n^2} \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

לסיכום:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

הכנס גרף

נשתמש בטור האחרון ונציב $x = \pi$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

נציב $x = 0$:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

משפט 3.5 התכנסות במ"ש של טור פוריה לפונקציה
 אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ ו- $f(-\pi) = f(\pi)$ ו- $f' \in E$, אז טור פוריה של f מתכנס
 במ"ש ל- f על כל הקטע. **הוכחה:** $f' \in E$ כלומר f בעלת טור פוריה.

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx]$$

גם ל- $f(x)$ יש טור פוריה:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

נמצא מהו הקשר בין מקדמי פוריה של f ומקדמי פוריה של f' .

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \cos nx & u' = -n \sin nx \\ v' = f' & v = f \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(f(\pi) (-1)^n - \overbrace{f(-\pi)}^{=f(\pi)} (-1)^n + nb_n \right)$$

עבור $n = 0$ $\alpha_0 = 0$ ובאופן כללי $\alpha_n = nb_n$. באותו אופן:

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = -na_n$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [nb_n \cos nx - na_n \sin nx]$$

הערה 3.6 אי שוויון בסל עבור טור פוריה: $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$ כאשר $c_k = \langle f, u_k \rangle$.

במקרה שלנו עבור $e_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} a_0 \right|^2 = \frac{|a_0|^2}{2}$$

עבור $e_n = \cos nx$

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = |a_n|^2$$

ובאופן דומה עבור $e_n = \sin nx$

$$|\langle f, e_n \rangle|^2 = |b_n|^2$$

ולסיכום אי-שוויון בסל עבור טור פוריה מוגדר באופן הבא:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] \leq \|f\|^2$$

נראה שטור פוריה של $f(x)$ מתכנס במ"ש.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

$$\left[\begin{array}{l} |a_n \cos nx| \leq |a_n| \\ |b_n \sin nx| \leq |b_n| \\ |a_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \\ |b_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \end{array} \right]$$

$$\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

נראה שהטור האחרון מתכנס.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left| \frac{\alpha_n}{n} \right|^2 + \left| \frac{\beta_n}{n} \right|^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)} \\ &\stackrel{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)} \end{aligned}$$

ולפי אי שוויון בסל $\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) \leq \|f\|^2$ ומצאנו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ בנוסף לכך שידוע שהוא מתכנס ולכן בסה"כ לפי מבחן ההשוואה של וירשטראס הטור שלנו מתכנס במ"ש. ■

חלק V

הרצאה 5

טענה 3.7 שוויון פרסבל

לכל $f \in E$ מתקיים השוויון הבא:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

כאשר a_n, b_n מקדמי פוריה של f .

שימוש בשוויון פרסבל - דוגמה

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{4\pi^4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\pi^5}{5} \right] = \frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

טענה 3.8 הגרסה המרוכבת של שוויון פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

כאשר $f \in E$ ו $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הינו טור פוריה המרוכב של $f(x)$.

תרגיל

1. מצאו טור פוריה מרוכב של e^x .

2. מצאו את $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

פתרון

1.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{(1-in)x}}{1-in} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{(1-in)\pi} - e^{(in-1)\pi}}{2\pi(1-in)} \\ &= \frac{[e^{\pm in\pi} = (-1)^n]}{2\pi(1-in)} \\ &= \frac{(-1)^n [e^\pi - e^{-\pi}]}{2\pi(1-in)} \end{aligned}$$

$$e^x \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n [e^\pi - e^{-\pi}]}{2\pi(1-in)} e^{inx}$$

2.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{2x}}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi}$$

מצד שני

$$\sum |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e^\pi - e^{-\pi})^2}{4\pi^2 |1-in|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(e^\pi - e^{-\pi})^2}{4\pi^2 (1+n^2)}$$

ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{(e^\pi - e^{-\pi})}{4\pi} \frac{1}{(e^\pi - e^{-\pi})^2} = \frac{\pi(e^\pi + e^{-\pi})}{e^\pi - e^{-\pi}} (= \pi \coth \pi)$$

4 טורי פוריה בקטעים כללים $[a, b]$

הגדרה 4.1 $E[a, b]$ מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין המקבלות ערכים ב.C.

הגדרה 4.2 מכפלה פנימית:

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

המערכת האורתונורמלית המתאימה היא:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right), \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

מקדמי פוריה

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx \end{aligned}$$

מקדמי פוריה עבור מרוכבים

$$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i \frac{2n\pi x}{b-a}} dx$$

באופן דומה ניתן לגדיר את האיברים האחרונים עבור קטע כללי סימטרי סביב 0 $[-L, L]$.

במקרה זה טור פוריה נראה כך:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

כאשר

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

תרגיל

חשב טור פוריה של $f(x) = x^2$ בקטע $[0, 2\pi]$.

פתרון

$$a_0 = \frac{2}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \dots = \frac{4}{n^2}$$