# אנליזת פורייה ויישומים

10 באוגוסט 2014

## תוכן עניינים

# חלק I
# הרצאה 1

# חלק II
# הרצאה 2

## 0.1 מרחב $L^2$

$$f,g\in C\left[a,b\right]$$

נגדיר מכפלה פנימית

$$\begin{aligned}\left\langle f,g\right\rangle &= \int_a^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx\\ ||f|| &= \sqrt{\left\langle f,f\right\rangle}=\int_a^b\left|f\right|^2dx\end{aligned}$$

**הערה 0.1** נורמה של $f$ קיימת אם $\left|f\right|^2$ הינה אינטגרבילית. במקרה זה ניתן להגדיר מרחק בין פונקציות ע"י $||f-g||$ ($||f-g||=0\Leftrightarrow f=g$).

**הגדרה 0.2** $L^2\left[a,b\right]$ מרחב הפונקציות $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ כך ש$\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|^2dx<\infty$.
מבחינה מעשית יש לבדוק את התנאי האחרון ולבדוק האם פונ' שייכת ל$L^2\left[a,b\right]$.

**דוגמא:**

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \begin{cases}1 & 1\le x<\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}\\ ||f||^2 &= \int_0^{0.5}dx=\frac{1}{2}\Rightarrow f\in L^2\left[a,b\right]\end{aligned}$$

דוגמא לפונ' שלא שייכת ל$L^2\left(a,b\right)$:

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \frac{1}{\sqrt{x}},\ 0<x<1\\ ||f||^2 &= \int_0^1\frac{1}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^1\frac{1}{x}dx\\ &= -\lim_{\epsilon\to0^+}\ln\epsilon=\infty\end{aligned}$$

**עוד דוגמא:**

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\ -1 & else\end{cases}$$

### 0.1.1 התכנסות בנורמה

סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב$L^2(a,b)$ מתכנסת בו אם קיימת פונקציה $f\in L^2(a,b)$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty}||f_n-f||=0$$

## 0.2 מרחב $l_p$

**הגדרה 0.3** $x\in l_2$ אם $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מתכנסת (כלומר $\sum|\xi_n|^2<\infty$).

**הגדרה 0.4** הגדרת הנורמה והמכפלה פנימית במקרה זה:

$$\begin{aligned}||x||_2 &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\\ \langle x,y\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y_i}\end{aligned}$$

### 0.2.1 אי שוויון קושי שוורץ עבור $l_2$

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k||y_k|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2}$$

**הגדרה 0.5** באופן דומה עבור $p>1$ ניתן להגדיר מרחב $l_p$: $x\in l_p$ אם $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p<\infty$.

$$||x||_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

### 0.2.2 אי שוויון הלדר (Holders inequality)

אם נתונות שתי סדרות $x\in l_p,y\in l_q$ כאשר $l_p,l_q$ מרחבים צמודים (כלומר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n||\eta_n|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

**הוכחה:** ניעזר באי שוויון יונג Jung: עבור $p,q$ צמודים $\forall\alpha,\beta>0:\alpha\beta\le\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$.
נסמן $\alpha=\frac{|\xi_n|}{||x||_p},\beta=\frac{|\eta_n|}{||y||_q}$.
נציב לאי שוויון יונג:

$$\frac{|\xi_n|}{||x||_p}\frac{|\eta_n|}{||y||_q}\le\frac{|\xi_n|^p}{||x||_p^p\,p}+\frac{|\eta_n|^q}{||y||_q^q\,q}$$

נעבור לסכומים:

$$\begin{aligned}\frac{\sum|\xi_n|\,|\eta_n|}{||x||_p\,||y||_q} &\le \frac{\sum|\xi_n|^p}{||x||_p^p\,p}+\frac{\sum|\eta_n|^q}{||y||_q^q\,q}\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\\ &\Downarrow\\ \sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\,|\eta_n| &\le ||x||_p\,||y||_q\end{aligned}$$

נציב את ההגדרה של נורמה ונקבל את הדרוש. ■

**תרגיל**

נתונה סדרה $x=\left\{\frac{5^n-3^n}{7^n}\right\}\in l_2$, נחשב את $||x||_2$:

$$\begin{aligned}||x||_2 &= \sqrt{\sum|\xi_n|^2}\\ ||x||_2^2 &= \sum\left(\frac{5^n-3^n}{7^n}\right)^2\\ &= \sum\frac{25^n-2*15^n+9^n}{49^n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{25}{49}\right)^n-2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15}{49}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{49}\right)^n\\ &= \frac{\frac{25}{49}}{1-\frac{25}{49}}-2\frac{\frac{15}{49}}{1-\frac{15}{49}}+\frac{\frac{9}{49}}{1-\frac{9}{49}}=\frac{16}{85}\\ ||x||_2 &= \frac{4}{\sqrt{85}}\end{aligned}$$

**תרגיל: נראה את קיום אי שוויון קושי שוורץ במקרה של $L^2$.**

**הוכחה:**

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f\bar{g}dx,||f||=\sqrt{\langle f,g\rangle}$$

$$\left|\left|\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right|\right|^2 = \int_a^b\left(\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right)^2dx\ge0$$

$$\int_a^b \left(\frac{|f|^2}{||f||^2} - \frac{2|f||g|}{||f||\,||g||} + \frac{|g|^2}{||g||^2}\right) dx \geq 0$$

$$\int_a^b \frac{|f||g|}{||f||\,||g||} dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|f|^2}{||f||^2} dx + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{|g|^2}{||g||^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

כלומר:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f||g|\,dx &\leq ||f||\,||g|| \\ \langle |f|, |g| \rangle &\leq ||f||\,||g|| \end{aligned}$$

מתכונת האינטגרציה $\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\,dx$ נקבל $|\langle f, g\rangle| \leq ||f||\,||g||$. ■

## 0.3 תהליך גרם שמידט Gram Schmidt

התהליך מייצר סדרה של וקטורים (פונ') אורתוגנליים $\{u_1, ..., u_n\}$ מסדרה של וקטורים (פונ') בת"ל $\{v_1, ..., v_n\}$ כך ש$span\{v_1, ..., v_n\} = span\{u_1, ..., u_n\}$.

התהליך הינו איטרטיבי:

שלב 1: $u_1 = v_1$

שלב 2: $u_2 = v_2 - \tilde{v_2} = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$.

$\vdots$

שלב $n$: $u_n = v_n - \tilde{v_n} = v_n - \frac{\langle v_n, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - ... - \frac{\langle v_n, u_{n-1}\rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1}\rangle} u_{n-1}$.

### 0.3.1 פולינומי לג'נדר

$$P_n[x] = Span\left\{\underset{S_0}{x^0}, ..., \underset{S_n}{x^n}\right\}$$

מכפלה פנימית מוגדרת באופן הבא:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^1 p(x)\,q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 = S_0(x) \\ P_1(x) &= S_1(x) - \frac{\langle S_1, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = S_1(x) = x \\ & \langle S_1, P_0\rangle = \int_{-1}^1 x * 1dx = 0 \\ P_2 &= S_2 - \tilde{S_2} = S_2 - \frac{\langle S_2, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} P_0 - \frac{\langle S_2, P_1\rangle}{\langle P_p, P_p\rangle} P_1 \\ &= \frac{3x^2 - 1}{3} \end{aligned}$$

ע"מ לגרום לפולינומי לג'נדר לקיים תנאי $P_n(1)=1$ נכתוב $P_2=\frac{3}{2}P_2=\frac{3x^2-1}{2}$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3x^2-1}{2} \\ P_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{2} \\ &\vdots \\ P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$\langle P_n,P_m\rangle=\int_{-1}^{1}P_nP_mdx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{2}{2n+1} & n=m\end{cases}=\delta_{n,m}\frac{2}{2n+1}$$

### 0.3.2 פולינומי צ'בישב

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}p(x)\,q(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2-1 \\ T_3(x) &= 4x^3-3x \\ &\vdots \\ T_n(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)\,T_m(x)=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \pi & n=m=0\\ \frac{\pi}{2} & m=n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

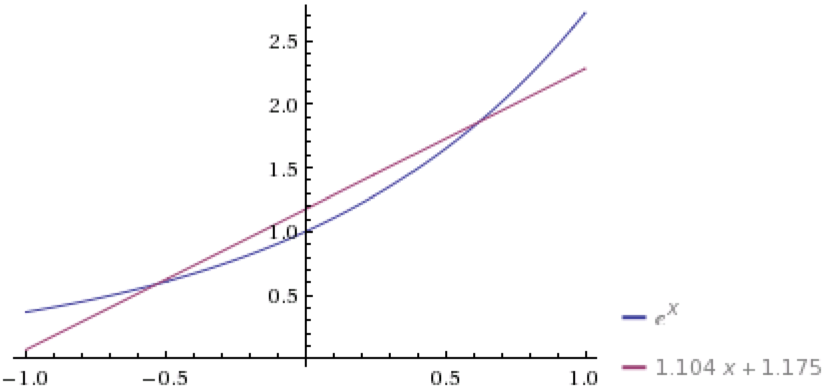
**תרגיל:**

מצא קירוב ל$f(x)=e^x$ באמצעות קו ישר בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:** נמצא היטל אורתוגונלי במרחב $Span\{P_0(x),P_1(x)\}$

נחשב $e^x \approx a_0 P_0 + a_1 P_1$ כאשר

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\langle e^x, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{1}{2}\langle e^x, 1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = 1.175 \\ a_1 &= \frac{\langle e^x, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = ... = 1.104 \end{aligned}$$

לסיכום $e^x \approx 1.175 + 1.104x$




■

**הערה 0.6** בהינתן קטע כללי $(a, b)$ נתין להגדיר מ"פ חדשה המותאמת לקטע ובאמצעותה להגדיר מערכת חדשה של פולינומים אורתוגונליים ובאמצעותה לחשב את הקירוב הדרוש.
האפשרות הנוספת היא להגדיר העתקה ליניארית $\varphi : [a, b] \to [-1, 1]$ ולהשתמש בה ואז ניתן לעבוד עם מע' אורתוגונלית קיימת.

### 0.3.3 פולינומים אורתוגונליים נוספים:

1. Laguerre

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= -x + 1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right) \\ &\vdots \\ (k+1) L_{k+1}(x) &- (2k + 1 - x) L_k(x) + k L_{k-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

2. פולינומי הרמיט Hermite

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} p(x) q(x) dx$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2-2 \\ &\vdots \\ H_{n+1} &= 2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

**דוגמא:**

$$x\in[0,1]\,,\ f_n(x)=x^n$$

מקרה א': $0\le x<1$, $x^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$

מקרה ב': $x=1$, $x^n \overset{n\to\infty}{\to} 1$

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$f_n$ מתכנסת נקודתית ל$f$, נבדוק התכנסות ב$L^2[0,1]$.

$$||x^n-0||=\sqrt{\int_0^1 x^{2n}}=\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1=\sqrt{\frac{1}{2n-1}}\overset{n\to\infty}{\to}0$$

כלומר $x^n \overset{L^2}{\to} 0$.

**דוגמא:**

$$\begin{aligned} f_n &= \begin{cases}0 & ,x=0\\ n & ,0<x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases} \\ f_n &\overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ ||f_n-0||^2 &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2dx=\left.n^2x\right|_0^{\frac{1}{n}}=n \\ ||f_n-0|| &= \sqrt{n}\not\to 0 \end{aligned}$$

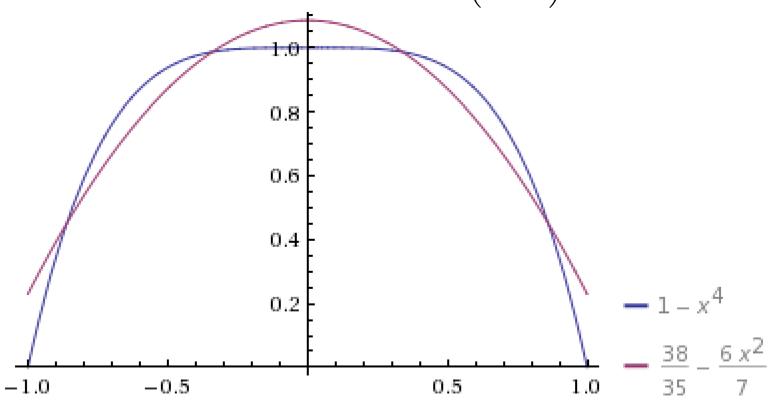
כלומר הסדרה לא מתכנסת ל$f=0$ ב$L^2$.

**תרגיל**

מצא קירוב ל$f\left(x\right)=1-x^{4}$ באמצעות פולינום ממעלה 2 בקטע $[-1,1]$. **הוכחה:**

$$\begin{aligned}\tilde{f}\left(x\right) &= a_{0}P_{0}\left(x\right)+a_{1}P_{1}\left(x\right)+a_{2}P_{2}\left(x\right)\\ a_{i} &= \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1}f\left(x\right)P_{i}\left(x\right)dx\\ a_{0} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^{4}\right)dx=\frac{4}{5}\\ a_{1} &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^{4}\right)xdx=0\\ a_{2} &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^{4}\right)\frac{3x^{2}-1}{2}dx=-\frac{4}{7}\end{aligned}$$

לסיכום $f\left(x\right)\approx\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\left(\frac{3x^{2}-1}{2}\right)=\frac{38-30x^{2}}{35}$

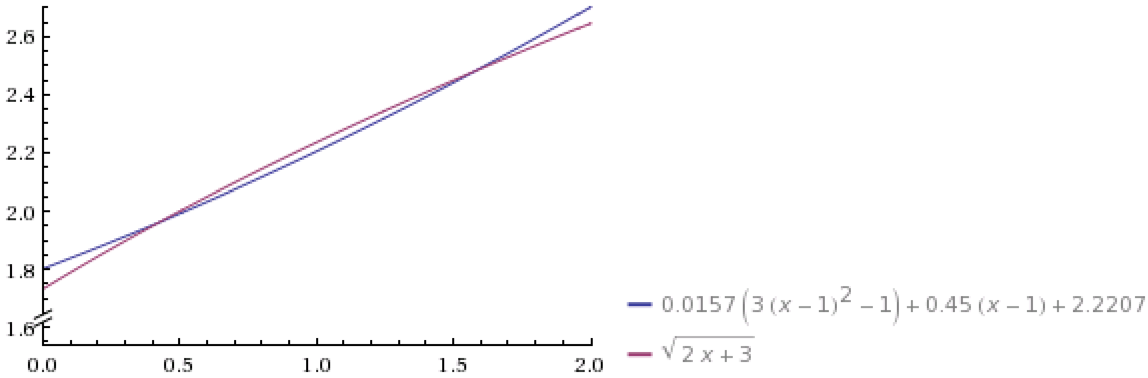



■

**תרגיל**

מצא קירוב ל$f\left(x\right)=\sqrt{2x+3}$ בקטע $[0,2]$ באמצעות פולינום ממעלה שנייה. **הוכחה:**
נעתיק את הפונקציה מקטע $[0,2]$ לקטע $[-1,1]$ ע"י $t=x-1$, $x=t+1$.

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &= \sqrt{2x+3}\\ f\left(t\right) &= \sqrt{2t+5}\\ a_{0} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1*\sqrt{2t+5}dt=2.2207\\ a_{1} &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t*\sqrt{2t+5}dt=0.45\\ a_{2} &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3t^{2}-1}{2}\sqrt{2t+5}dt=0.0314\\ \tilde{f}\left(x\right) &= 2.2207+0.45\left(x-1\right)+0.0314\frac{3\left(x-1\right)^{2}-1}{2}\end{aligned}$$




■

# חלק III

# הרצאה 3

## 1 מערכת אורתונורמלית אינסופית

**הגדרה 1.1** מרחב סגור
תהי $\{e_1, e_2, ...\}$ מע' אורתונורמלית אינסופית במרחב מ"פ $V$. נאמר שהמערכת הינה סגורה ב־$V$ אם לכל $u \in V$ מתקיים

$$\lim_{m \to \infty} \left|\left| u - \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle e_i \right|\right| = 0$$

**טענה 1.2** המע' האורתונורמלית $\{e_1, e_2, ...\}$ סגורה במרחב מ"פ אמ"מ לכל $u \in V$ מתקיים השוויון

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 = ||u||^2$$

**הערה 1.3** השוויון הנ"ל נקרא שוויון פרסבל.

**הגדרה 1.4** $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ נקראת רציפה למקוטעין, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. ל־$f$ יש לכל היותר מספר סופי של נקודות אי־רציפות.
2. בכל נק' אי־רציפות קיימים הגבולות החד צדדים.

פונ' רציפה למקוטעין מגדירה מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין.

**הגדרה 1.5** $E$ מרחב ליניארי של פונקציות הרציפות למקוטעין.
נגדיר מ"פ על מרחב זה:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

נתבונן במע' האינסופית הבאה:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...\right\}$$

נבדוק אורתוגונליות ונורמה של כל איבר

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x\right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x dx = 0 \\
\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}\pi n}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\
\langle\sin mx, \sin nx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \sin nx dx
\end{aligned}$$

ניתן לפתור בזהות טריגונומטרית $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right) - \cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$ או באינטגרציה בחלקים $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$, נפתור בדרך הראשונה.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(m-n\right)x - cos\left(m+n\right)x\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(m-n\right)x}{m-n} - \frac{\sin\left(m+n\right)}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\
\langle\sin mx, \cos nx\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx = 0 \text{ (odd function)}
\end{aligned}$$

**בדיקת נורמות:**

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\right| &= \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx} = \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1 \\
||\sin nx||^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx = 1 \\
||\cos nx||^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx = 1
\end{aligned}$$

ראינו כי במע' אורתונורמלית אינסופית הקרוב ל$f \in E$ הינו מהצורה $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f, e_i\rangle e_j$.

במערכת שהוגדרה ישנם 3 סוגים של איברים:

1. $e_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\langle f, e_n\rangle e_n = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\frac{1}{\sqrt{2}}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx$$

2. $e_n = \sin nx$

$$\langle f, \sin nx \rangle \sin nx = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \sin nx$$

3. $e_n = \cos nx$

$$\langle f, \cos nx \rangle \cos nx = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cos nx$$

**הגדרה 1.6** טור פוריה:
תהי $f \in E$, הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הינו טור פורייה המתאים ל־$f$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad , n = 0, 1, 2, ... \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad , n = 1, 2, 3, .... \end{aligned}$$

נסמן:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

**דוגמא:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \le x < \pi \\ -2 & , -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

שלבי עבודה: מציאת $a_0, a_n, b_n$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2dx + \int_{0}^{\pi} dx\right) = -1 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} \cos nx dx\right) = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} \sin nx dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & , n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n}\right) = \frac{6}{n\pi} & , n \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases} \end{aligned}$$

ולכן:

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)} \sin(2n-1)x$$

## 1.1 טורי פורייה של פונ' זוגיות ואי זוגיות.

**הגדרה 1.7** פונ' $f$ הינה זוגית אם $f(-x) = f(x)$ ואי זוגית אם $f(-x) = -f(x)$.

### 1.1.1 תכונות:

1. זוגית × זוגית = זוגית
2. אי־זוגית × זוגית = אי־זוגית
3. אי זוגית × אי־זוגית = זוגית

כידוע אם $f(x)$ הינה אי זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$$

ואם $f(x)$ הינה זוגית אז לכל $b > 0$

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

במקרה זה טורי פוריה מוגדרים באופן הבא:

1. עבור $f\in E$ זוגית

$$\begin{aligned} f\left(x\right) & \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \\ a_n & = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx \end{aligned}$$

במקרה זה הטור נקרא "טור קוסינוסים".

2. עבור $f\in E$ אי־זוגית

$$\begin{aligned} f\left(x\right) & \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \\ b_n & = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx \end{aligned}$$

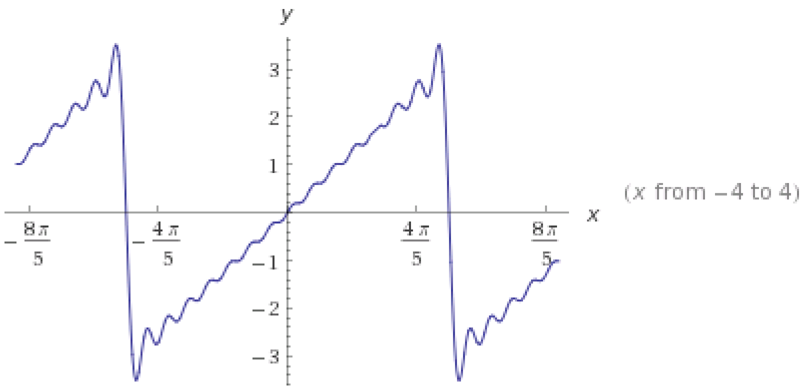
במקרה זה הטור נקרא "טור סינוסים".

**דוגמא**

נחשב טור פוריה של $f\left(x\right)=x$. $f$ הינה אי זוגית $\Leftarrow$ יתקבל טור סינוסים $a_n=0$.

$$\begin{aligned} b_n & = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx \\ & = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right] \\ & = \begin{bmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=\sin nx & v=-\frac{\cos nx}{n} \end{bmatrix} \\ & = \frac{2}{\pi}\frac{-\pi\left(-1\right)^n}{n}=\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin nx$$



### 1.1.2 תופעת גיבס - שגיאה בטור חלקי של טור פוריה

ננתח את הדוגמא האחרונה $f(x)=x$

$$T_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

נתבונן בקטע $[0,\pi]$ נחלק את הרקע ל־$m$ קטעים ונבדוק מהו הערך של $T_m$בנקודה $x_m=\pi-\frac{\pi}{m}$

$$\begin{aligned}
T_m(x_m) &= \sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)=(*)\\
\sin n\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right) &= \sin n\pi\cos\frac{n\pi}{m}-\cos n\pi\sin\frac{n\pi}{m}\\
&= 0-(-1)^n\sin\frac{n\pi}{m}=(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{m}\\
(*) &= \sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{m}\\
&= \sum_{n=1}^{m}\frac{2}{n}\frac{n\pi}{m}\frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}}\\
&= 2\sum_{n=1}^{m}\frac{\pi}{m}\frac{\sin\frac{n\pi}{m}}{\frac{n\pi}{m}}
\end{aligned}$$

הגבול של הביטוי האחרון כאשר $m\to\infty$ הינו האינטגרל

$$2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}$$

לפי ההגדרה של סכומי רימן $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_j)\Delta x_k$

$$(*)=2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}=2\int_0^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...\right)dx\approx 1.18\pi$$

באופן זה ניתן להאריך של השגיאה היחסית המתקבלת בנק' הקרובה ל$\pi$.

$$\frac{1.18\pi-\pi}{2\pi}\approx 0.09=9\%$$

**הערה 1.8** ישנה טענה המכלילה את התוצאה האחרונה ולפי טענה זו, גודל השגיאה לא עולה על 9% מגודל הקפיצה בנק' אי רציפות.

**תרגיל**

נתון $f(x)\in E[-\pi,\pi]$, לכל $a,b,c\in\mathbb{C}$ נגדיר

$$G(a,b,c)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)+a+b\cos x+c\sin x|^2\,dx$$

עבור איזה ערך של $a,b,c$ $g$ מקבלת את ערכה המינימלי?

**פתרון**

ניתן לתייחס ל$G(a,b,c)$ כאל $||\ ||^2$ של ההפרש בין $f(x)$ לקירוב שלה באמצעות המערכת $\{1,\cos x,\sin x\}$, כלומר:

$$||f-(-a-b\cos x-c\sin x)||^2$$

באופן כזה נמצא את:

$$\begin{aligned}
-a &= \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\\
-b &= \frac{\langle f,\cos x\rangle}{\langle \cos x,\cos x\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\\
-c &= =\frac{\langle f,\sin x\rangle}{\langle \sin x,\sin x\rangle}=\frac{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx}{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx
\end{aligned}$$

# חלק IV

# הרצאה 4

## 2 טורי פוריה מרוכבים

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}dx$$

ביחס למ"פ זו, המערכת הבאה הינה מע' אורתונורמלית

$$\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

לפי <u>נוסחת אוילר</u> $e^{\pm inx}=\cos nx\pm i\sin nx$

טור פרויה מרוכב המתאים לפונ' $f\in E$ מוגדר באופן הבא:

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

כאשר

$$\forall n\in\mathbb{Z}\,:\,c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}dx$$

נראה שטור פוריה מרוכב שקול לטור פוריה ממשי.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx-i\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\right]\\
&= \frac{a_n-ib_n}{2}
\end{aligned}$$

(כאשר $a_n, b_n$ הינם מקדמי פוריה שטור ממשי.)
לפי אותו עקרון:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx} dx = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \\
\Rightarrow & \quad \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = ic_n - c_{-n} \end{cases} \\
f(x) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(\cos nx + i\sin nx) + c_{-n}(\cos nx - i\sin nx)\right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n + c_{-n})\cos nx + i(c_n - c_{-n})\sin nx\right] \\
&= \overbrace{c_0}^{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)
\end{aligned}$$

.$\left(c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}\right)$

**דוגמא: חישוב טור פוריה מרוכב**

$f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
n \neq 0: \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-inx} & v = -\frac{1}{in}e^{-inx} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-x\frac{1}{in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} + \frac{\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{1}{in}\left(-\frac{1}{in}\right)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{e^{-in\pi} - e^{in\pi}}{n^2}\right] = \frac{i(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} e^{-in\pi} + e^{in\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi + \cos n\pi + i\sin n\pi = 2\cos n\pi \\ e^{-in\pi} - e^{in\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi - \cos n\pi - i\sin n\pi = -2i\sin n\pi = 0 \end{cases}$$

ולכן עבור $n \neq 0$ $c_n = \frac{i(-1)^n}{n}$.

## 3 התכנסות נקודתית של טורי פוריה

**הגדרה 3.1** $E'$ - מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין $f:[-\pi,\pi]:\mathbb{C}$ כך שבכל נקודה בקטע קיימות הנגזרות החד־צדדיות.

**משפט 3.2** משפט דיריכלה
תהי $f\in E'$, מחזורית $2\pi$. בכל נק', בה קיימות הנגזרות החד־צדדיות והן שוות, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס ל־$f(x)$.
בכל נק' אי רציפות, טור הפוריה, טור הפוריה של $f(x)$ מתכנס לממוצע הגבולות החד־צדדים, כלומר ל־$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.
במילים אחרות, אם תנאי המשפט מתקיימים $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$.

**הוכחה:** כלי עזר:

**טענה 3.3** גרעין דיריכלה Dirichlet kernel

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+...+\cos nu=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

**הוכחת הטענה:**

נסמן את האגף השמאלי ב־$S$ ונכפיל אותו ב־$2\sin\frac{u}{2}$:

$$2S\sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+2\cos u\sin\frac{u}{2}+...+2\cos nu\sin\frac{u}{2}$$

נשתמש בזהות $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

$$\Rightarrow 2S\sin\frac{u}{2}=\sin\frac{u}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}u-\sin\frac{u}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}u-\sin\frac{3}{2}u\right)+...+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u\right)$$

זהו טור טלסקופי ולכן $2S\sin\frac{u}{2}=\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)u$ ולכן $S=\frac{\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$

**תכונה של גרעין דיריכלה:**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=1$$

ההתכנסות הנקודתית של טור פוריה הינה ביחס לסדרה של הסכומים החלקיים של טור פוריה. נגדיר סכום חלקי לטור פוריה:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]$$

כאשר המטרה היא להוכיח $f(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{S_n(x)\}$. נציב את מקדמי פוריה המפורשים

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\right]\right]dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}(t-x)\right)\right]}{2\sin\left[\frac{1}{2}(t-x)\right]}dt \\
&= \begin{bmatrix} u=t-x \\ du=dt \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{2\sin\frac{1}{2}u}du
\end{aligned}$$

$f(x+u)$ הינה פונ' מחזורית וגם $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$ הינה מחזורית $(2\pi)$. האינטרוול $[-\pi-x,\pi-x]$ גם כן באורך $2\pi$ ולכן

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right]}{2\sin\frac{1}{2}u}du$$

לפי תכונת גרעין דיריכלה:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=1$$

נכפיל את שני האגפים ב$f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

כלומר ע"מ להוכיח את ההתכנסות $f(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{S_n(x)\}$ עלינו להוכיח את הדבר הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+u)-f(u)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=0$$

**למה 3.4** למת רימן לבג
לכל $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט מתקיים

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\cos mx dx=\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\sin mx dx=0$$

(כאשר $m$ לא הבכרח טבעית)

נגדיר פונקציה $\varphi$ באופן הבא:

$$\varphi(u)=\frac{f(x+u)-f(x)}{2\sin\frac{u}{2}}=\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

ניתן לראות ש$\varphi(u)$ הינה אינטגרבילית בהחלט כמכפלה של פונ' אינטגר' בהחלט ופונקציה חסומה ולכן לפי למת לבג מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu=0$$

■

### 3.0.3 שימוש במשפט

**דוגמא**

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

נציב $x=\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{1}\right)\\ &= 2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots}$$

**תרגיל**

נחשב טור פוריה של $x^2$:

$x^2$ הינה פונ' זוגית בקטע $[-\pi,\pi]$ ולכן $b_n=0$.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx\\ &= \begin{bmatrix} u=x^2 & u'=2x\\ v'=\cos nx & v=\frac{\sin nx}{n}\end{bmatrix}\\ &= \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int x\sin nxdx\right]\\ &= \begin{bmatrix} u=x & u'=1\\ v'=\sin nx & v=\frac{-\cos nx}{n}\end{bmatrix}\\ &= \frac{2}{n}\left[0-\frac{2}{n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}dx\right)\right]\\ &= \frac{4}{n\pi}\left[-\pi\frac{(-1)^n}{n}\right]=\frac{4(-1)^n}{n^2}\\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}\end{aligned}$$

לסיכום:

$$\boxed{x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2} \cos nx}$$

**הכנס גרף**

נשתמש בטור האחרון ונציב $x = \pi$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2} \left(-1\right)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

נציב $x = 0$:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

**משפט 3.5** התכנסות במ"ש של טור פוריה לפונקציה

אם $f$ רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ ו־$f\left(-\pi\right) = f\left(\pi\right)$ ו־$f' \in E$, אז טור פוריה של $f$ מתכנס במ"ש ל־$f$ על כל הקטע. **הוכחה:** $f' \in E$ כלומר $f$ בעלת טור פוריה.

$$f'\left(x\right) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\right]$$

גם ל־$f\left(x\right)$ יש טור פוריה:

$$f\left(x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$$

נמצא מהו הקשר בין מקדמי פוריה של $f$ ומקדמי פוריה של $f'$.

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'\left(x\right) \cos nx dx \\
&= \begin{bmatrix} u = \cos nx & u' = -n \sin nx \\ v' = f' & v = f \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\pi} f\left(x\right) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left( f\left(\pi\right) \left(-1\right)^n - \overbrace{f\left(-\pi\right)}^{=f\left(\pi\right)} \left(-1\right)^n + nb_n \right)
\end{aligned}$$

עבור $n=0$ $\alpha_0=0$ ובאופן כללי $\alpha_n=nb_n$. באותו אופן:

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx=-na_n$$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[nb_n\cos nx-na_n\sin nx\right]$$

**הערה 3.6** אי שוויון בסל עבור טור פוריה: $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leq||f||^2$ כאשר $c_k=\langle f,u_k\rangle$.

במקרה שלנו עבור $e_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\langle f,e_n\rangle|^2=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1}{\sqrt{2}}dx\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}a_0\right|^2=\frac{|a_0|^2}{2}$$

עבור $e_n=\cos nx$:

$$|\langle f,e_n\rangle|^2=|a_n|^2$$

ובאופן דומה עבור $e_n=\sin nx$:

$$|\langle f,e_n\rangle|^2=|b_n|^2$$

ולסיכום אי־ שוויון בסל עבור טור פוריה מוגדר באופן הבא:

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|^2+|b_n|^2\right]\leq||f||^2$$

נראה שטור פוריה של $f(x)$ מתכנס במ"ש.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]\quad\leq\quad\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$$

$$\left[\begin{array}{c}|a_n\cos nx|\leq|a_n|\\ |b_n\sin nx|\leq|b_n|\\ |a_n|\leq\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}\\ |b_n|\leq\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}\end{array}\right]$$

$$\leq\left|\frac{a_0}{2}\right|+2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}$$

נראה שהטור האחרון מתכנס.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2+\left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}\left(|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\right)}\\ &\overbrace{\leq}^{\substack{\text{Cauchy}\\ \text{Schwarz}}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2}\end{aligned}$$

ולפי אי שוויון בסל $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\leq||f||^2$ ומצאנו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ בנוסף לכך שידוע שהוא מתכנס ולכן בסה"כ לפי מבחן ההשוואה של וירשטראס הטור שלנו מתכנס במ"ש. ■

# חלק V

# הרצאה 5

**טענה 3.7** שוויון פרסבל

לכל $f\in E$ מתקיים השוויון הבא:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$$

כאשר $a_n,b_n$ מקדמי פוריה של $f$.

**שימוש בשוויון פרסבל - דוגמא**

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$a_0=\frac{2\pi^2}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx &= \frac{\frac{4\pi^4}{9}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\\ \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-\pi}^{\pi}\right] &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi^5}{5}\right]=\frac{2\pi^4}{5}=\frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} &= \frac{8\pi^4}{45}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}}$$

**טענה 3.8** הגרסה המרוכבת של שוויון פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x\right)\right|^{2}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_{n}\right|^{2}$$

כאשר $f\in E$ ו־$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n}e^{inx}$ הינו טור פוריה המרוכב של $f\left(x\right)$.

**תרגיל**

1. מצאו טור פוריה מרוכב של $e^{x}$.
2. מצאו את $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^{2}}$.

**פתרון**

.1

$$\begin{aligned}c_{n} & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}e^{-inx}dx\\
 & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx\\
 & = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right|_{-\pi}^{\pi}\\
 & = \frac{e^{(1-in)\pi}-e^{(in-1)\pi}}{2\pi\left(1-in\right)}\\
 & = \left[e^{\pm in\pi}=\left(-1\right)^{n}\right]\\
 & = \frac{\left(-1\right)^{n}\left[e^{\pi}-e^{-\pi}\right]}{2\pi\left(1-in\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{e^{x}\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\left[e^{\pi}-e^{-\pi}\right]}{2\pi\left(1-in\right)}e^{inx}}$$

.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}$$

מצד שני

$$\sum\left|c_{n}\right|^{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)^{2}}{4\pi^{2}\left|1-in\right|^{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)^{2}}{4\pi^{2}\left(1+n^{2}\right)}$$

ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^{2}}=\frac{\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{4\pi}}{\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)^{2}}{4\pi^{2}}}=\frac{\pi\left(e^{\pi}+e^{-\pi}\right)}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\left(=\pi\coth\pi\right)$$

# 4 טורי פוריה בקטעים כלליים $[a,b]$

**הגדרה 4.1** $E\left[a,b\right]$ מרחב ליניארי של פונ' רציפות למקוטעין המקבלות ערכים ב$\mathbb{C}$.

**הגדרה 4.2** מכפלה פנימית:

$$\left\langle f,g\right\rangle =\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

המערכת האורתונורמלית המתאימה היא:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right),\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)\right\} _{n=1}^{\infty}$$

**מקדמי פוריה**

$$\begin{aligned}a_{0} & = & \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\\ a_{n} & = & \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx\\ b_{n} & = & \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx\end{aligned}$$

**מקדמי פוריה עבור מרוכבים**

$$c_{n}=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)e^{-i\frac{2n\pi x}{b-a}}dx$$

באופן דומה ניתן לגדיר את האיברים האחרונים עבור קטע כללי סימטרי סביב 0 $[-L,L]$.

במקרה זה טור פוריה ניראה כך:

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_{0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos\frac{n\pi x}{L}+b_{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

כאשר

$$\begin{aligned}a_{n} & = & \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\\ b_{n} & = & \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\end{aligned}$$

**תרגיל**

חשב טור פוריה של $f\left(x\right)=x^{2}$ בקטע $[0,2\pi]$.

**פתרון**

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2\pi-0}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \cdots = \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$