# תרגיל 9

## להגשה עד 30.1.17

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח.
נסמן: $L^p(\mu)=L^p(X,\mathbb{A},\mu)$. ו: $l^p=l^p(\mathbb{N},\mathbb{P}(\mathbb{N}),\mu)$, באשר $\mu$ הינה מידת הספירה.

**שאלה 1**

1. נניח כי $\mu(X)<\infty$. הוכיחו כי אם $1\le r<p<\infty$ אזי $L^p(\mu)\subseteq L^r(\mu)$ ולכל $f\in L^p(\mu)$ מתקיים:
$$\|f\|_r\le\mu(X)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

2. הוכיחו כי אם $r<p$ אזי $l^r\subsetneq l^p$.

**שאלה 2**

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות־$\mathbb{A}$ על $X$ המתכנסת כב"מ לפונקציה $f$.
נניח שעבור $p\in[1,\infty)$ קיימת $g\in L^p(\mu)$ כך שלכל $n$: $|f_n|\le g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f,\ f_n\in L^p(\mu)$,
וכן כי $f_n\to f$ ב $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$.

**שאלה 3**

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ו$\mathcal{M}$ תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$. הוכיחו כי: $(\mathcal{M}^\perp)^\perp=\mathcal{M}$.

**שאלה 4**

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט עם בסיס בן מניה ותהי $(x_n)_{\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{H}$. נתון כי $\|x_n\|\to\|x\|$ כאשר $n\to\infty$, וכי לכל $y\in\mathcal{H}$ מתקיים: $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$ כאשר $n\to\infty$. הוכיחו כי: $\|x_n-x\|\to 0$ כאשר $n\to\infty$.

**שאלה 5**

1. יהי $1\le p\le\infty$. הוכיחו כי $l^p\subseteq l^\infty$.

2. הראו כי המרחב $(l^1,\|\cdot\|_\infty)$ אינו שלם.

**שאלה 6**

יהי $p\in[1,\infty)$, ותהי $f\in L^p(\mu)$ . הוכיחו כי המידה של הקבוצה: $[f=0]=\{x\mid f(x)=0\}$ הינה $\sigma$־ סופית (כלומר, ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מדידות ובעלות מידה סופית).

**שאלה 7**

נגדיר: $F := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$. הוכיחו או הפריכו:

1. $F$ תת מרחב לינארי של $l^2$.
2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה ב$l^2$.

**בהצלחה :)**