תרגיל בית 2 תורת גלואה - תשע"ח

1. יהיו $F \subseteq K$ שדות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

   א. אם a איבר אלגברי מעל K אז הוא אלגברי מעל F.

   ב. אם a איבר אלגברי מעל F אז הוא אלגברי מעל K.

   ג. אם a איבר אלגברי מעל F אז גם $\alpha \cdot a$ הוא אלגברי לכל $\alpha \in F$.

2. הוכיחו כי $\mathbb{Q}\left[i\sqrt{3}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{3}, \rho_3\right] = \mathbb{Q}\left[\rho_3\right]$ כאשר $\rho_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ הוא שורש יחידה 3- פרימיטיבי.

3. נסמן $\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{-5}{2}$. חשבו את ההפכי של $\theta^2 + 6\theta + 7$ בשדה $\mathbb{Q}[\theta]$ (חשבו את הפולינום המינימלי. הציגו את ההפכי ע"י נציג מחזקה מינימלית).

4. מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל השדות הנתונים:

   א. $\sqrt[3]{5}$ מעל $\mathbb{Q}$.

   ב. $\sqrt[4]{3}$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

   ג. $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}[i]$.

   ד. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ מעל $\mathbb{Q}$.

   ה. $\sqrt{x} - 1$ מעל $\mathbb{Q}(x)$.

5. כמה תת־שדות של $\mathbb{C}$ איזומורפיים ל$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\right]$?

6. יהיו שדות $K_1, K_2 \subseteq L$ נוכל להגדיר את הקומפוזיטום שלהם K_1K_2 כתת־שדה של L המינימלי שמכיל את K_1 ואת K_2.
נניח $K_1 = F(a_1, \dots, a_n)$ ו $K_2 = F(b_1, \dots, b_m)$ הוכיחו כי $K_1K_2 = F(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$.

7. תהי K/F הרחבה ממימד סופי. הוכיחו כי כל איבר של K הוא אלגברי מעל F (במצב כזה אומרים שK/F הרחבה אלגברית).
(רמז: חשבו על החזקות $1, a, a^2, a^3, \dots$).

8. תהי K/F הרחבה ממימד סופי. נקבע איבר $a \in K$ ונסמן את הפולינום המינימלי שלו מעל F ב $f_a(x)$ (שבודאי קיים לפי השאלה הקודמת).
נתבונן בפונקציה $l_a\colon K \to K$ המוגדרת ע"י $l_a(k) = ak$. זוהי העתקה לינארית של המ"ו K מעל F.
נסמן את הפולינום האופייני של l_a (בתור העתקה לינארית) ב$g(x)$.
הוכיחו כי $f_a(x) \mid g(x)$ מעל F.
(רמז: קיילי המילטון)