תרגול 9 - משפט הגבול המרכזי, חוק חזק/חלש של המספרים הגדולים - תשע"ט

23 באפריל 2019

1. **<u>הגדרה - משפט הגבול המרכזי במימד 1</u>** (למשתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות ($i.i.d$))

- יהיו $X_1,...,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים זהה. נתון $\mathbb{E}[X_1^2]<\infty$. נסמן $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\frac{S_n-\mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}\leq a)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\frac{(X_1+...+X_n)-n\cdot\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\cdot Var(X_1)}}\leq a)=\mathbb{P}(Y\leq a)$$

עבור איזה $a\in\mathbb{R}$ ו- $Y\sim N(0,1)$. כלומר $\frac{(X_1+...+X_n)-n\cdot\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\cdot Var(X_1)}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

- **<u>דוגמא</u>**

  - לנורות המרכיבות את המקרן של האוניברסיטה יש תוחלת חיים של $\mu=100$ שעות. וסטיית תקן של $\sigma=75$. האוניברסיטה משתמשת המקרן 9000 שעות בכל סמסטר. מה ההסתברות ש- 100 נורות יספיקו לעבודה כל הסמסטר?

    <u>פתרון</u>

    נסמן ב- S_{100} את תוחלת החיים הכוללת של 100 נורות. ניתן להניח כי תוחלות החיים של הנורות אינן תלויות זו בזו. אנו בעצם מעוניינים לחשב $\mathbb{P}(S_{100}>9000)=?$ נשתמש במשפט הגבול המרכזי:

$$\mathbb{P}(S_{100}>9000)=\mathbb{P}(\frac{S_{100}-(100\cdot 100)}{75\cdot\sqrt{100}}>\frac{9000-(100\cdot 100)}{75\cdot\sqrt{100}})$$

$$=\mathbb{P}(Z_{100}>-\frac{4}{3})\approx 0.909$$

- **<u>תרגיל</u>**

- יהיו $X_1,...,X_{100}$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות כך ש־ $\forall_k X_k \sim unif(0,1)$ חשב בקירוב את $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \,|\, e^{-99} < \prod_{k=1}^{100} X_k(\omega) \le e^{99}\})$.

<u>פתרון</u>

נגדיר את שתי הקבוצות:

$$A = \{\omega\in\Omega \,|\, e^{-99} < \prod_{k=1}^{100} X_k(\omega) \le e^{99}\}$$

$$B = \{\omega\in\Omega \,|\, -99 < \sum_{k=1}^{100} ln(X_k(\omega)) \le 99\}$$

ברור כי מתקיים $A=B$. לכן, מספיק לחשב $\mathbb{P}(B)$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \,|\, -99 < \sum_{k=1}^{100} ln(X_k(\omega)) \le 99\}) =$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \,|\, \frac{-99-100\cdot\mathbb{E}[ln(X_1(\omega))]}{10\cdot\sqrt{Var(ln(X_1(\omega)))}} < \frac{\sum_{k=1}^{100} ln(X_k(\omega)) - 100\cdot\mathbb{E}[ln(X_1(\omega))]}{10\cdot\sqrt{Var(ln(X_1(\omega)))}} \le \frac{99-100\cdot\mathbb{E}[ln(X_1(\omega))]}{10\cdot\sqrt{Var(ln(X_1(\omega)))}}\})$$

עתה, מכיוון ש־ $X_1 \sim unif(0,1)$ כיצד מתפלג $ln(X_1)$?

$X_1 \sim unif(0,1) \Longleftarrow f_{X_1}(x) = 1$ בתחום $(0<x<1)$ $\Longleftarrow$ נגדיר העתקה חד חד ערכית

$$Y = ln(X_1)$$

מ־ $(0,1)$ ל־ $(-\infty,0)$. ומתקיים $e^Y = X_1$. ואז $\frac{dX_1}{dY} = e^Y$. לכן:

$$f_Y(y) = f_x(Y^{-1})\cdot|\frac{dX_1}{dY}| = e^y \; (y<0) \Longrightarrow f_Y(y) = e^{-y} \; (y>0)$$

לפיכך, $ln(X_1) \sim exp(1)$ ולכן, $Var(X_1) = \mathbb{E}(X_1) = 1$. לכן, נותר לחשב

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \,|\, \frac{-99-100}{10} < \frac{\sum_{k=1}^{100} ln(X_k(\omega)) - 100}{10} \le \frac{99-100}{10}\}) \approx$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \,| 19.9 \ge N(0,1) > 0.1\}) \approx 0.4702$$

1. **<u>הגדרה ־ החוק החלש של המספרים הגדולים</u>**

יהיו $\{X_k\}_{k\in\{1,2,...,n\}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים (ניתן להניח שהם בלתי מתואמים בזוגות) ושווי התפלגות. ונתון $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$. נגדיר $\overline{S_n} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k$ (ממוצע ערכי המשתנים המקריים).

אזי $\overline{S_n} \xrightarrow{p} \mu$. כלומר, ההסתברות לכך שהממוצע יהיה רחוק מהתוחלת ישאף ל־0 כאשר n גדול.

2. **<u>הגדרה ־ החוק החזק של המספרים הגדולים</u>**

יהיו $\{X_k\}_{k\in\{1,2,...,n\}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. ונתון $\mathbb{E}[X_1]=\mu<\infty$. נגדיר $\overline{S_n}=\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ (ממוצע ערכי המשתנים המקריים). אזי $\overline{S_n}\xrightarrow{a.s}\mu$.

כלומר, ההסתברות לכך שהממוצע יהיה רחוק מהתוחלת ישאף ל־0 כאשר n גדול.

- **<u>תרגיל</u>**
  - חשבו

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\frac{x_1^2+...+x_n^2}{x_1+...+x_n}dx_1...dx_n$$

  - <u>פתרון</u>

פתרון האינטגרל הנ"ל הוא אותו הדבר כמו לחשב

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\frac{x_1^2+...+x_n^2}{x_1+...+x_n})$$

כאשר $x_1,...x_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות כאשר $\forall_k x_k\sim unif(0,1)$.

מהחוק החלש של המספרים הגדולים מתקיים:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_i x_i^2\xrightarrow{p}\mathbb{E}(x_1^2)=\int\limits_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_i x_i\xrightarrow{p}\mathbb{E}(x_1)=\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

לפיכך,

$$\frac{x_1^2+...+x_n^2}{x_1+...+x_n}=\frac{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_i x_i^2}{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_i x_i}\xrightarrow{p}\frac{2}{3}$$

ומכיוון ש־ $\frac{x_1^2+...+x_n^2}{x_1+...+x_n}\leq 1$ אזי לפי משפט התכנסות הנשלטת מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\frac{x_1^2+...+x_n^2}{x_1+...+x_n}dx_1...dx_n=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^2+...+x_n^2}{x_1+...+x_n}dx_1...dx_n=\frac{2}{3}$$