תרגול 9 - משפט הגבול המרכזי, חוק חזק/חלש של המספרים הגדולים - תשע"ט

3 במאי 2019

1. <u>**הגדרה ־ משפט הגבול המרכזי במימד 1**</u> (למשתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות ($i.i.d$))

- יהיו $X_1, ..., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים זהה. נתון $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. נסמן $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \leq a) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{(X_1 + ... + X_n) - n\cdot\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\cdot Var(X_1)}} \leq a) = \mathbb{P}(Y \leq a)$$

עבור איזה $a \in \mathbb{R}$ ו־ $Y \sim N(0,1)$. כלומר

$$\frac{(X_1 + ... + X_n) - n\cdot\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\cdot Var(X_1)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

- <u>**דוגמא**</u>

  – לנורות המרכיבות את המקרן של האוניברסיטה יש תוחלת חיים של $\mu = 100$ שעות. וסטיית תקן של $\sigma = 75$. האוניברסיטה משתמשת המקרן 9000 שעות בכל סמסטר. מה ההסתברות ש־ 100 נורות יספיקו לעבודה כל הסמסטר?

  <u>**פתרון**</u>

  נסמן ב־ S_{100} את תוחלת החיים הכוללת של 100 נורות. ניתן להניח כי תוחלות החיים של הנורות אינן תלויות זו בזו. אנו בעצם מעוניינים לחשב $\mathbb{P}(S_{100} > 9000) =?$ נשתמש במשפט הגבול המרכזי:

$$\mathbb{P}(S_{100} > 9000) = \mathbb{P}(\frac{S_{100} - (100\cdot 100)}{75\cdot\sqrt{100}} > \frac{9000 - (100\cdot 100)}{75\cdot\sqrt{100}})$$

$$= \mathbb{P}(Z_{100} > -\frac{4}{3}) \approx 0.909$$

1. **הגדרה ־ החוק החלש של המספרים הגדולים**

יהיו $\{X_k\}_{k\in\{1,2,...,n\}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים (ניתן להניח שהם בלתי מתואמים בזוגות) ושווי התפלגות. ונתון $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$. נגדיר $\overline{S_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ (ממוצע ערכי המשתנים המקריים).

אזי $\overline{S_n} \xrightarrow{p} \mu$. כלומר, ההסתברות לכך שהממוצע יהיה רחוק מהתוחלת ישאף ל־0 כאשר n גדול.

2. **הגדרה ־ החוק החזק של המספרים הגדולים**

יהיו $\{X_k\}_{k\in\{1,2,...,n\}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. ונתון $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$. נגדיר $\overline{S_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ (ממוצע ערכי המשתנים המקריים). אזי $\overline{S_n} \xrightarrow{a.s} \mu$.

כלומר, ההסתברות לכך שהממוצע יהיה רחוק מהתוחלת ישאף ל־0 כאשר n גדול.

3. **הערות ־ "התכנסות חלשה", "התכנסות בהתפלגות" ומשפטי ההתכנסות השונים**

(א) משפט הגבול המרכזי מרכז תנאים להתכנסות בהתפלגות.

(ב) החוק החלש של המספרים הגדולים מרכז תנאים להתכנסות בהסתברות.

(ג) החוק החזק של המספרים הגדולים מרכז תנאים להתכנסות $a.s$ (כמעט תמיד).

(ד) **מספר הערות על אינטגרלים ותוחלת**

i. יהי $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ משתנה מקרי. ניתן לחשוב על ההתפלגות של X כעל מידת הסתברות P (כלומר $X \sim P$ על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) המוגדרת לכל $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ע"י $P(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

א'. לדוגמא: עבור $X \sim N(0,1)$. מתקיים $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), N)$. ומתקיים למשל

$$\frac{1}{2} = N((-\infty, 0]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in (-\infty, 0]\}) = \mathbb{P}(X \leq 0)$$

ii. **טענה** - לכל מ"מ X מעל מרחב הסתברות קיימת פונקציית הצטברות מתאימה F_X. וההיפך, לכל פונקציה המקיימת את תכונות פונקציית ההצטברות ($A-C$) יש מרחב הסתברות עם משתנה מקרי X כך ש- F פונקציית ההתפלגות המצטברת של X:

א'. F מונוטונית עולה חלש

ב'. F רציפה מימין

ג'. $\lim\limits_{n\to-\infty} F(n)=0, \lim\limits_{n\to\infty} F(n)=1$

iii. מסקנה - עבור X משתנה מקרי. ניתן להגיד ש- $X\sim P$ כאשר P מידת הסתברות. ובאופן דומה עבור פונקציית הצטברות מתאימה לסמן $X\sim F$.

(ה) **שני משפטים חשובים שיעזרו לנו להבין טוב יותר אינטגרלים ומידות הסתברות.**

i. <u>משפט (רדון - ניקודים)</u> - יהיו μ ו- γ שתי מידות סיגמא סופיות על $(\Omega,\mathcal{F})$ (המידה של המרחב כולו היא סופית וגם המרחב כולו הוא איחוד בן מניה של קבוצות מדידות בעלות מידה סופית).

א'. אם לכל $A\in\mathcal{F}$ $\mu(A)=0 \Longrightarrow \gamma(A)=0$ אז γ רציפה בהחלט ביחס ל- μ. במצב זה קיימת פונקציה f מדידה כך ש- $\gamma(A)=\int\limits_A f(x)d\mu(x)$.

ב'. לכל $A\in\mathcal{F}$ אומרים כי f היא הצפיפות של המידה γ ביחס למידה μ ומסמנים $f=\frac{d\gamma}{d\mu}$.

ii. <u>משפט</u>

א'. **תזכורת**

בהנתן סדרת משתנים מקריים כאשר $X_n\sim F_n$. נאמר ש- X_n מתכנסת בהתפלגות למשתנה מקרי $X\sim F$ ונסמן $X_n \overset{D}{\to} X$ אם לכל t נקודת רציפות של F. $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t)=F(t)$.

ב'. **משפט**

מידת הסתברות $X_n\sim P_n$ מתכנסת חלש למידת הסתברות $X\sim P$. (נסמן $P_n \overset{w}{\to} P$) אם ורק אם $X_n \overset{D}{\to} X$.

iii. <u>הגדרה</u> - יהי X משתנה מקרי ממשי מעל מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי:

$$\mathbb{E}(X_n) = \int\limits_{\Omega} X_n d\mathbb{P}$$

iv. יהי X משתנה מקרי כלשהו המוגדר $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathcal{G}, P)$ אזי:

א'. $\forall_{A \in \mathcal{G}} P(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

ב'. P מידה חדשה המוגדרת ע"י $\mathbb{P}$. ואם $g : S \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה רציפה וחסומה, אז מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(X_n)] = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g[X_n(\omega)] d\mathbb{P}_n(\omega) =$$

g חסומה, לכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{S} g(x_n) dP_n(x) = \int\limits_{S} \lim_{n\to\infty} g(x_n) dP_n(x)$$

g רציפה וכן, $P_n \overset{w}{\to} P$ אזי:

$$\int\limits_{S} \lim_{n\to\infty} g(x_n) dP_n(x) = \int\limits_{S} g(x) dP(x)$$

ואם מתקיימים התנאים ממשפט רדון ניקודים (כלומר קיימת פונקציית צפיפות) אזי:

$$\int\limits_{S} g(x) dP(x) = \int\limits_{S} g(x) f(x) d\mu(x)$$

ואם אינטגרבילי רימן אזי:

$$\int\limits_{S} g(x) f(x) d\mu(x) = \int\limits_{S} g(x) f(x) dx$$

v. **משפט** - עבור משתנים מקריים מעל $\mathbb{R}$ המקיימים $X_n \sim P_n$ ו- $X \sim P$ הבאים שקולים-

א'. $P_n \overset{w}{\to} P$

ב'. $X_n \overset{d}{\to} X$

ג'. לכל פונקציה $h:\mathbb{R}\to[0,1]$ רציפה וחסומה מתקיים $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[h(X_n)]=\mathbb{E}[h(X)]$

- **<u>תרגיל</u>**

  - חשב

$$G=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}cos(\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}+...+x_n^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{n}})\,dx_1...dx_n$$

  - <u>פתרון</u>

נגדיר $\Omega=[-1,1]$ כאשר המשתנים המקריים $X_1,...,X_n\sim U[-1,1]$ המוגדרים $\forall_k\,X_k:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_k)\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),U)$ ומקיימים:

$$\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}:U(A)=\mathbb{P}_k(X_k\in A)$$

נגדיר $h(Z_n)=Cos(Z_n)$ פונקציה רציפה וחסומה.
עתה,

$$Z_n=\frac{y_1+...+y_n}{\sqrt{n}}$$

כאשר

$$\forall_k y_k=x_k^{-\frac{1}{3}}$$

h פונקציה רציפה וחסומה (מלבד נקודה אחת שאינה משפיעה חישוב האינטגרל)
לכן פתרון האינטגרל הנ"ל הוא אותו הדבר כמו לחשב

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(h(Z_n))=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(cos(Z_n))=$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[-1,1]^n}cos(Z_n)d\mathbb{P}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}cos(\frac{y_1+...+y_n}{\sqrt{n}})d\mathbb{P}_1\cdots d\mathbb{P}_n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}cos(\frac{y_1+...+y_n}{\sqrt{n}})f_X(x_1,...,x_n)\,dx_1,...,dx_n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}cos(\frac{S_n}{\sqrt{n}})\prod_{i=1}^{n}f_{x_i}(x_i)\,dx_1,...,dx_n =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}cos(\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}+...+x_n^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{n}})dx_1,...,dx_n$$

* מכיוון ש־ $h(z)=Cos(z)$ חסומה. נרצה ע"י התכנסות חלשה

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(cos(Z_n))=\mathbb{E}(cos(Z))$$

כאשר על פי משפט הגבול המרכזי $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$. מספר הערות:

* $x_k\sim U([-1,1])$ בלתי תלויים שווי התפלגות $\Longleftarrow$ $y_k=x_k^{-\frac{1}{3}}$ בלתי תלויים שווי התפלגות.

.

$$F_{(y_1,...,y_n)}(a_1,...,a_n)=\mathbb{P}(y_1\le a_1,...,y_n\le a_n)=$$

$$\mathbb{P}(x_1^{-\frac{1}{3}}\le a_1,...,x_n^{-\frac{1}{3}}\le a_n)=\mathbb{P}(x_1\le a_1^{-3},...,x_n\le a_n^{-3})=$$

$$\mathbb{P}(x_1\le a_1^{-3},...,x_n\le a_n^{-3})=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(x_i\le a_i^{-3})=$$

$$\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(x_i^{-\frac{1}{3}}\le a_i)=\prod_{i=1}^{n}F_{y_i}(a_i)$$

* לכן, ממשפט הגבול המרכזי

$$Z_n=\frac{y_1+...+y_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}Z\sim N(\mu,\sigma^2)=N(0,3)$$

*

$$\mathbb{E}[y_i]=\int_{-1}^{1}y_i(x_i)\cdot\frac{1}{2}dx_i=\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot[x^{\frac{2}{3}}]_{-1}^{1}=0$$

*

$$\mathbb{E}[y_i^2] = \int_{-1}^{1} y_i^2(x_i) \cdot \frac{1}{2} dx_i = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot [x^{\frac{1}{3}}]_{-1}^{1} = 3$$

*

$$Var[y_i] = \mathbb{E}[y_i^2] - (\mathbb{E}[y_i])^2 = 3$$

- מתקיים

$$G = \mathbb{E}[Cos(Z)] = \mathbb{E}[\frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[e^{iZ}] + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[e^{-iZ}] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\mathbb{E}[e^{iZ}] + \mathbb{E}[e^{-iZ}]) = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_Z(1) + \varphi_Z(-1)) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{-\frac{3}{2}}$$