תרגול 9 - משפט הגבול המרכזי, חוק חזק/חלש של המספרים הגדולים - תשע"ט

5 במאי 2019

1. **הגדרה ־ משפט הגבול המרכזי במימד 1** (למשתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות ($i.i.d$))

- יהיו $X_1, ..., X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים זהה. נתון

$$\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$$

. נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

אזי:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \le a) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{(X_1 + ... + X_n) - n \cdot \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n \cdot Var(X_1)}} \le a) = \mathbb{P}(Y \le a)$$

עבור איזה $a \in \mathbb{R}$ ו־ $Y \sim N(0,1)$. כלומר

$$\frac{(X_1 + ... + X_n) - n \cdot \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n \cdot Var(X_1)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

- **דוגמא**

  – לנורות המרכיבות את המקרן של האוניברסיטה יש תוחלת חיים של $\mu = 100$ שעות. וסטיית תקן של $\sigma = 75$. האוניברסיטה משתמשת המקרן 9000 שעות בכל סמסטר. מה ההסתברות ש־ 100 נורות יספיקו לעבודה כל הסמסטר?

פתרון

נסמן ב־ S_{100} את תוחלת החיים הכוללת של 100 נורות. ניתן להניח כי תוחלות החיים של הנורות אינן תלויות זו בזו. אנו בעצם מעוניינים לחשב $\mathbb{P}(S_{100} > 9000) = ?$ נשתמש במשפט הגבול המרכזי:

$$\mathbb{P}(S_{100} > 9000) = \mathbb{P}(\frac{S_{100} - (100 \cdot 100)}{75 \cdot \sqrt{100}} > \frac{9000 - (100 \cdot 100)}{75 \cdot \sqrt{100}})$$

$$= \mathbb{P}(Z_{100} > -\frac{4}{3}) \approx 0.909$$

1. **הגדרה ־ החוק החלש של המספרים הגדולים**

   יהיו $\{X_k\}_{k \in \{1,2,\ldots,n\}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים (ניתן להניח שהם בלתי מתואמים בזוגות) ושווי התפלגות. ונתון $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$. נגדיר $\overline{S_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ (ממוצע ערכי המשתנים המקריים).

   אזי $\overline{S_n} \xrightarrow{p} \mu$. כלומר, ההסתברות לכך שהממוצע יהיה רחוק מהתוחלת ישאף ל־0 כאשר n גדול.

2. **הגדרה ־ החוק החזק של המספרים הגדולים**

   יהיו $\{X_k\}_{k \in \{1,2,\ldots,n\}}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. ונתון $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty$. נגדיר $\overline{S_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ (ממוצע ערכי המשתנים המקריים). אזי $\overline{S_n} \xrightarrow{a.s} \mu$.

   כלומר, ההסתברות לכך שהממוצע יהיה רחוק מהתוחלת ישאף ל־0 כאשר n גדול.

3. **הערות ־ "התכנסות חלשה", "התכנסות בהתפלגות" ומשפטי ההתכנסות השונים**

   (א) משפט הגבול המרכזי מרכז תנאים להתכנסות בהתפלגות.

   (ב) החוק החלש של המספרים הגדולים מרכז תנאים להתכנסות בהסתברות.

   (ג) החוק החזק של המספרים הגדולים מרכז תנאים להתכנסות $a.s$ (כמעט תמיד).

   (ד) **מספר הערות על אינטגרלים ותוחלת**

   i. יהי $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ משתנה מקרי. ניתן לחשוב על ההתפלגות של X כעל מידת הסתברות P (כלומר $X \sim P$ על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) המוגדרת לכל $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ע"י $P(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

א'. לדוגמא: עבור $X \sim N(0,1)$. מתקיים $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),N)$.
ומתקיים למשל

$$\frac{1}{2}=N((-\infty,0])=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)\in(-\infty,0]\})=\mathbb{P}(X\leq 0)$$

ii. **טענה** - לכל מ"מ X מעל מרחב הסתברות קיימת פונקציית הצטברות מתאימה F_X. וההיפך, לכל פונקציה המקיימת את תכונות פונקציית ההצטברות ($A-C$) יש מרחב הסתברות עם משתנה מקרי X כך ש- F פונקציית ההתפלגות המצטברת של X:

א'. F מונוטונית עולה חלש

ב'. F רציפה מימין

ג'. $\underset{n\to-\infty}{lim}F(n)=0,\underset{n\to\infty}{lim}F(n)=1$

iii. מסקנה - עבור X משתנה מקרי. ניתן להגיד ש- $X\sim P$ כאשר P מידת הסתברות. ובאופן דומה עבור פונקציית הצטברות מתאימה לסמן $X\sim F$.

(ה) **שני משפטים חשובים שיעזרו לנו להבין טוב יותר אינטגרלים ומידות הסתברות.**

i. משפט (רדון - ניקודים) - יהיו μ ו- γ שתי מידות סיגמא סופיות על $(\Omega,\mathcal{F})$ (המידה של המרחב כולו היא סופית וגם המרחב כולו הוא איחוד בן מניה של קבוצות מדידות בעלות מידה סופית).

א'. אם לכל $A\in\mathcal{F}$ $\mu(A)=0\implies\gamma(A)=0$ אז γ רציפה בהחלט ביחס ל- μ. במצב זה קיימת פונקציה f מדידה כך ש- $\gamma(A)=\int\limits_A f(x)d\mu(x)$.

ב'. לכל $A\in\mathcal{F}$ אומרים כי f היא הצפיפות של המידה γ ביחס למידה μ ומסמנים $f=\frac{d\gamma}{d\mu}$.

ii. משפט

א'. **תזכורת**

בהנתן סדרת משתנים מקריים כאשר $X_n\sim F_n$. נאמר ש- X_n

מתכנסת בהתפלגות למשתנה מקרי $X \sim F$ ונסמן $X_n \overset{D}{\to} X$ אם לכל t נקודת רציפות של F. $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$.

ב'. **משפט**

מידת הסתברות $X_n \sim P_n$ מתכנסת חלש למידת הסתברות $X \sim P$.
(נסמן $P_n \overset{w}{\to} P$) אם ורק אם $X_n \overset{D}{\to} X$.

iii. <u>הגדרה</u> - יהי X משתנה מקרי ממשי מעל מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. אזי:

$$\mathbb{E}(X_n) = \int\limits_{\Omega} X_n d\mathbb{P}$$

iv. יהי X משתנה מקרי כלשהו המוגדר $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (S, \mathcal{G}, P)$ אזי:

א'. $\forall_{A\in\mathcal{G}} P(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

ב'. P מידה חדשה המוגדרת ע"י $\mathbb{P}$. ואם $g : S \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה רציפה וחסומה, אז מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(X_n)] = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} g[X_n(\omega)] d\mathbb{P}_n(\omega) =$$

g חסומה, לכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{S} g(x_n) dP_n(x) = \int\limits_{S} \lim_{n\to\infty} g(x_n) dP_n(x)$$

g רציפה וכן, $P_n \overset{w}{\to} P$ אזי:

$$\int\limits_{S} \lim_{n\to\infty} g(x_n) dP_n(x) = \int\limits_{S} g(x) dP(x)$$

ואם מתקיימים התנאים ממשפט רדון ניקודים (כלומר קיימת פונקציית צפיפות) אזי:

$$\int\limits_{S} g(x) dP(x) = \int\limits_{S} g(x) f(x) d\mu(x)$$

ואם אינטגרבילי רימן אזי:

$$\int\limits_{S} g(x) f(x) d\mu(x) = \int\limits_{S} g(x) f(x) dx$$

v. **משפט -** עבור משתנים מקריים מעל $\mathbb{R}$ המקיימים $X_n \sim P_n$ ו- $X \sim P$ הבאים שקולים-

א'. $P_n \xrightarrow{w} P$

ב'. $X_n \xrightarrow{d} X$

ג'. לכל פונקציה $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ רציפה וחסומה מתקיים $\underset{n\to\infty}{lim}\, \mathbb{E}[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X)]$

- **<u>תרגיל</u>**

  - חשב

$$G = \underset{n\to\infty}{lim} \frac{1}{2^n} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} cos(\frac{x_1^{-\frac{1}{3}} + ... + x_n^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{n}})\, dx_1...dx_n$$

  - <u>פתרון</u>

נסמן $\Omega = [-1,1]$ כאשר המשתנים המקריים $X_1, ..., X_n \sim U[-1,1]$ המוגדרים $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), U) \to (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_k) : \forall_k\, X_k$ ומקיימים:

$$\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} : U(A) = \mathbb{P}_k(X_k \in A)$$

נגדיר $h(x_1, ..., x_n) = Cos(Z_n)$ כאשר:

$$Z_n = \frac{y_1 + ... + y_n}{\sqrt{n}}$$

$$\forall_k y_k = x_k^{-\frac{1}{3}}$$

<u>נזכר במשפט לבג:</u>

<u>פונקציה חסומה היא אינטגרבילית במובן רימן אם ורק אם קבוצת נקודות האי רציפות שלה בעלת מידה 0.</u>

מכיוון ש- h פונקציה רציפה (מלבד נקודה סליקה) וחסומה פתרון האינטגרל הנ"ל הוא אותו הדבר כמו לחשב:

$$\underset{n\to\infty}{lim}\, \mathbb{E}(h(x_1, ..., x_n)) =$$

$$\underset{n\to\infty}{lim} \int\limits_{[-1,1]^n} h(x_1, ..., x_n) d\mathbb{P} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-1,1]^n} h(x_1,...,x_n)d(\mathbb{P}_1 \times ... \times \mathbb{P}_n) =$$

מפוביני (מידה סיגמא סופית) ו־ h פונקציה אינגרבילית רימן

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} h(x_1,...,x_n) d\mathbb{P}_1, ..., d\mathbb{P}_1 =$$

ל־$x_1,...,x_n$ קיימת פונקציית צפיפות

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} h(x_1,...,x_n) f_X(x_1,...,x_n)\, dx_1,...,dx_n =$$

$x_1,...,x_n$ בלתי תלויים

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} cos(\frac{y_1 + ... + y_n}{\sqrt{n}}) \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i)\, dx_1,...,dx_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} cos(\frac{x_1^{-\frac{1}{3}} + ... + x_n^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{n}}) dx_1,...,dx_n$$

* מכיוון ש־ h חסומה ורציפה (מלבד נקודה סליקה). נרצה ע"י התכנסות חלשה

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(cos(Z_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(cos(\frac{y_1 + ... + y_n}{\sqrt{n}})) = \mathbb{E}(cos(Z))$$

כאשר על פי משפט הגבול המרכזי $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$. מספר הערות:

* $x_k \sim U([-1,1])$ בלתי תלויים שווי התפלגות $\Longleftarrow$ $y_k = x_k^{-\frac{1}{3}}$ בלתי תלויים שווי התפלגות.

.

$$F_{(y_1,...,y_n)}(a_1,...,a_n) = \mathbb{P}(y_1 \le a_1, ..., y_n \le a_n) =$$

$$\mathbb{P}(x_1^{-\frac{1}{3}} \le a_1, ..., x_n^{-\frac{1}{3}} \le a_n) = \mathbb{P}(x_1 \le a_1^{-3}, ..., x_n \le a_n^{-3}) =$$

$$\mathbb{P}(x_1 \le a_1^{-3}, ..., x_n \le a_n^{-3}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(x_i \le a_i^{-3}) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(x_i^{-\frac{1}{3}} \le a_i) = \prod_{i=1}^{n} F_{y_i}(a_i)$$

* לכן, ממשפט הגבול המרכזי

$$Z_n = \frac{y_1 + ... + y_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(\mu, \sigma^2) = N(0,3)$$

*

$$\mathbb{E}[y_i] = \int_{-1}^{1} y_i(x_i) \cdot \frac{1}{2} dx_i = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot [x^{\frac{2}{3}}]_{-1}^{1} = 0$$

*

$$\mathbb{E}[y_i^2] = \int_{-1}^{1} y_i^2(x_i) \cdot \frac{1}{2} dx_i = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot [x^{\frac{1}{3}}]_{-1}^{1} = 3$$

*

$$Var[y_i] = \mathbb{E}[y_i^2] - (\mathbb{E}[y_i])^2 = 3$$

ומתקיים

$$G = \mathbb{E}[Cos(Z)] = \mathbb{E}[\frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}] = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[e^{iZ}] + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}[e^{-iZ}] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\mathbb{E}[e^{iZ}] + \mathbb{E}[e^{-iZ}]) = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_Z(1) + \varphi_Z(-1)) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{-\frac{3}{2}}$$

כדרוש.