

פיסיקה למתמטיקאים

גלגול ללא החלקה

1. ננתח כעת את התנועה ע"י החוק שני של ניוטון עבור תאוצת מרכז המסה, ואת התנועה סביב מרכז המסה, ע"י השנוי בתנע הזוויתי

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau},$$

כאשר $\vec{\tau}$ המומנט הכולל, $\vec{\omega}$ המהירות הזוויתית, ו I מומנט האינרציה של הגוף.

מומנט אינרציה של מסה נקודתית m בנקודה \vec{r} נתון ע"י

$$I = mr^2,$$

ולכן עבור גוף בעל צפיפות מסה $\rho(\vec{r})$ (ב d מימדים ובתחום Ω) נקבל

$$I = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) r^2 d^d r.$$

אצלנו (חישוק בעל צפיפות מסה אחידה $\rho = m/2\pi r$) נקבל

$$I = \frac{m}{2\pi r} r^3 \int_0^{2\pi} d\theta = mr^2.$$

השנוי בתנע הזוויתי יהיה אפוא,

$$mr^2 \ddot{\theta} = \tau = -rf,$$

כאשר f כח החיכוך. התאוצה של מרכז המסה נתונה ע"י

$$m\ddot{x} = mg \sin \phi + f$$

וע"י שמוש באילוץ $\dot{x} = r\dot{\theta}$ נקבל

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2}, \quad f = -\frac{mg \sin \phi}{2}$$

כפי שקיבלנו בכיתה.