

מבנים דיסקרטיים – תרגיל 5

להגשה: 21.5.2013

1.  $GL_2(R)$  היא חבורת המטריצות ההפיכות מגודל  $2 \times 2$  עם מקדמים ממשיים. תהי

$$\phi: GL_2(R) \rightarrow GL_2(R) \text{ המקיימת } \phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

היא איזומורפיזם?

2. תהי  $G = \{1, -1, i, j, ij, -i, -j, -ij\}$  חבורה עם פעולת כפל המוגדרת

$$[G : H] = 4 \text{ כך ש-} H \text{ מצאו תת-חבורה } i^2 = j^2 = -1, ji = -ij.$$

3. כזכור איזומורפיזם של חבורות  $f: G \rightarrow H$  שומר פעולה, חח"ע ועל. הוכיחו:

a. שהוא גם מעביר יחידה ליחידה (כלומר:  $f(e_G) = e_H$ ).

b. שהוא גם מעביר הופכי להופכי (כלומר:  $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ ).

c. שהוא גם מעביר חזקה לחזקה (כלומר:  $f(a^n) = (f(a))^n$ ).

d. שסדר איבר בתחום הוא כסדר תמונתו בטווח (כלומר:

$$\left. \begin{aligned} a^m = e_G &\Leftrightarrow (f(a))^m = e_H \\ a^{m-1} \neq e_G &\Leftrightarrow (f(a))^{m-1} \neq e_H \end{aligned} \right\}.$$

4. הראה כי  $U(\mathbb{Z}_4) \cong (Z_4, +)$  (ראו תרגיל 3 להגדרת  $U(\mathbb{Z}_n)$  ע"י בניית איזומורפיזם

ביניהן).

5. תהי  $G$  חבורה סופית ויהי  $a \in G$  מסדר  $n$ , ונניח ש  $n = mk$  כאשר  $m, k$  שלמים חיוביים.

הראו ש  $a^m$  הוא מסדר  $k$ .

6. א. האם  $(\mathbb{R}, +, 0)$  איזומורפי ל  $(\mathbb{Q}, +, 0)$ ?

ב. האם  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$  איזומורפי ל  $(\mathbb{R}, +, 0)$ ?

ג. האם  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$  איזומורפי ל  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ?