אלגברה לינארית 2 | תש"ף מועד ב'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ נמצא נוסחה מפורשת עבור A^n.

ראשית, נלכסן.

$$p_A(x)=det\begin{pmatrix}x-1&0&0\\-1&x-3&-2\\-1&-2&x-3\end{pmatrix}=(x-1)\cdot det\begin{pmatrix}x-3&-2\\-2&x-3\end{pmatrix}=(x-1)\cdot(x^2-6x+9-4)=(x-1)^2(x-5)$$

מוצאים בסיסים למרחבים עצמיים

$$V_1=N\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-2&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

$$V_5=N\begin{pmatrix}4&0&0\\-1&-2&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

ניתן לראות שהריבוי הגיאומטרי והאלגברי של כל ערך עצמי שווים ולכן לכסינה, מחשבים את ההפיכה ומקבלים

$$P=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

מתקבל

$$P^{-1}AP = D$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1}) \cdot ... \cdot (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(אפשר גם להמשיך לפתח ולהגיע ל $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$)

שאלה 2

(סעיף א)

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ כך שT צמוד לעצמו.

יהי $v \in V$ כך ש$T^n(v) = 0$ נוכיח כי $Tv = 0$.

<u>הוכחה</u> T צמוד לעצמו ולכן נורמלי, כמו כן, מעל $\mathbb{C}$ כל פולינום הוא מל"ל וסך הכל מקבלים שT ניתן ללכסון אוניטרי.

כעת קיים בסיס אורתונורמלי לV, $B = \{v_1, ..., v_m\}$ כך שהוא גם מלכסן את ההעתקה (ההעתקה לפי בסיס זה אלכסונית)

כלומר $Tv' = \lambda v_i'$ לכל $v' \in B$ ו$\lambda \in \sigma(T)$. כעת $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m$.

$$0 = T^n(v) = \alpha_1 T^n(v_1) + ... + \alpha_m T^n(v_m) = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + ... + \alpha_m \lambda_m^n v_m$$

(<u>הערה</u> λ_i הוא הערך העצמי המתאים לv_i)

ומהיותו של B בסיס ובפרט בת"ל מתקיים, לכל $1 \leq i \leq m$ כי $\alpha_i \lambda_i^n = 0$

ובפרט חייב להתקיים $\alpha_i \lambda_i = 0$ כלומר

$$T(v) = \alpha_1 \lambda_1 v_m + ... + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

שאלה 3

(סעיף א)

יהי $V=\mathbb{R}^5$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ עם הממ"פ הסטנדרטית.

תהי $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ויה $T:V\to V$ המוגדר לפי $Tv=Av$.

T צמודה לעצמה משום שלוקחים את הבסיס הסטנדרטי $E=\{e_1,...,e_5\}$ (הוא בפרט אורתונורמלי)

ואז $[T]_E=A$ ומתקיים $[T]_E^*=\overline{[T]_E}^t=A$

ראינו בהרצאה, כי T צמודה לעצמה אם"ם המטריצה המייצגת לפי בסיס אורתונורמלי צמודה לעצמה.

(סעיף ב)

נמצא פולינום אופייני ומינימלי של A (זה שקול מבחינת הבסיס הסטנדרטי E שהגדרנו בסעיף קודם)

נשים לב כי

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ולפי משפט מהרצאה, הפולינום האופייני של A הינו מכפלת הפ"א של שתי המטריצות.

$$p_A(x)=det\begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}\cdot det\begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ -3 & x-2 \end{pmatrix}=(x+1)(x-4)(x-1)^2(x-5)$$

כמו כן, הפולינום המינימלי הוא הlcm של הפולינומים המינימליים של הבלוקים.

ראשית, הפולינום האופייני של $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ הוא $(x-4)(x-1)^2$

ולכן $m_{A_1}(x)\in\{(x-4),(x-1),(x-1)^2,(x-4)(x-1)^2\}$ ובעזרת אלמינציה (פולינומים ממעלה קטנה לגדולה), מגיעים לכך שהמינימלי הוא $m_{A_1}=(x-4)(x-1)^2$

הפולינום האופייני של $A_2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ הוא $(x-5)(x+1)$

ולכן $m_{A_2}\in\{(x-5),(x+1),(x-5)(x+1)\}$ ובצורה דומה שוללים את הראשונים ומגיעים ל$m_{A_2}=(x-5)(x+1)$

כעת $m_A=lcm\{m_{A_1},m_{A_2}\}=p_A(x)=(x+1)(x-4)(x-1)^2(x-5)$

(סעיף ג)

$A=[T]_E$ צמודה לעצמה ולכן נורמלית, בנוסף ראינו שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים ולכן לכסינה אוניטרית.

משום שמדובר במטריצת בלוקים ניקח $P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$

כאשר P_1 מלכסנת את A_1 וP_2 מלכסנת את A_2

$P_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ואז $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ כלומר הבסיס הוא

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

מפעילים גראם שמידט לקבלת בסיס אורתוגונלי ואז ננרמל לקבלת

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

שאלה 4

הוכיחו/הפריכו :

(סעיף א)

יהי $T : V \to V$ אופרטור אוניטרי ויהי $W \le V$ תת מרחב אינווריאנטי, אז $W^\perp$ אינווריאנטי.

הוכחה יהי $w' \in W^\perp$ ו$w \in W$

$$< Tw', w >=< w', T^* w >=< w', Tw >$$

אבל $Tw \in W$ משום שW אינווריאני וכן $w' \in W^\perp$ ולכן $< w', Tw >= 0$ כלומר $< Tw', w >= 0$ ולכן $Tw' \in W^\perp$

(סעיף ב)

אם $T : V \to V$ אופרטור המקיים $T^2 = T$ אזי T ניתן ללכסון.

הוכחה בעזרת העברת אגפים נקבל $T^2 - T = 0$

כעת $p(x) = x^2 - x = x(x-1)$ הוא פולינום מאפס להעתקה, ולכן הפולינום המינימלי מחלק אותו. נקבל

$$m_A(x) \in \{x, x-1, x(x-1)\}$$

ובעבור כל אחד מהמקרים הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים ולפי משפט לכסין.

(סעיף ג)

יהי V ממ"פ ויהיו $W, U \le V$ תתי מרחב אזי $W^\perp \cap U^\perp = (W \cap U)^\perp$

הפרכה

נבחר $W = V, U = \{0\}$

כעת מצד אחד, (לפי משפט הפירוק הניצב)

$$W^\perp \cap U^\perp = V^\perp \cap V = \{0\}$$

מצד שני,

$$(W \cap U)^\perp = (V \cap \{0\})^\perp = \{0\}^\perp = V$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שלכל $v \in V$ מתקיים $< 0, v >= 0$.

וסיימנו.

שאלה 5

נתון שעבור $A \in \mathbb{R}^{3*3}$ מתקיים $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$

(סעיף א)

<u>A **סימטרית- לפעמים כן ולפעמים לא**</u>

למשל ניקח $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ שאינה סימטרית

ו $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ שכן סימטרית.

(סעיף ב)

<u>A**ניתנת ללכסון- לכל** A</u>

המטריצה בגודל $3 * 3$ ויש לה 3 ערכים עצמיים ולכן סיימנו, לפי משפט מהרצאה.

(סעיף ג)

<u>$A = A^2$**-לא מתקיים לאף** A</u>

<u>**הוכחה**</u>

<u>טענת עזר:</u> נניח $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ אזי $\sigma(A^2) = \{\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2\}$

משום שלכל $\lambda \in \sigma(A)$ מתקיים

$$Av = \lambda v$$

נכפול את שני הצדדים בA ונקבל

$$A(Av) = \lambda(Av)$$

$$A^2 v = \lambda^2 v$$

וכעת במקרה שלנו $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$ ולכן $\sigma(A) = \{0, 1\}$. יש להם ספקטרומים שונים ובפרט הם שונים $A \neq A^2$.