

# אלגברה לינארית 2 | תש"ף מועד ב'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

## שאלה 1

(סעיף א)

תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  נמצא נוסחה מפורשת עבור  $A^n$ .  
ראשית, נלכסן.

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-3 & -2 \\ -1 & -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1) \cdot \det \begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1) \cdot (x^2 - 6x + 9 - 4) = (x-1)^2(x-5)$$

מוצאים בסיסים למרחבים עצמיים

$$V_1 = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_5 = N \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ניתן לראות שהריבוי הגיאומטרי והאלגברי של כל ערך עצמי שווים ולכן לכסינה, מחשבים את ההפיכה ומקבלים

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1}) \cdot \dots \cdot (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A^n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cdot 5^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ (אפשר גם להמשיך לפתח ולהגיע ל)}$$

## שאלה 2

### (סעיף א)

יהי  $V$  מ"מ מעל  $\mathbb{C}$  כך ש  $T$  צמוד לעצמו.

יהי  $v \in V$  כך ש  $T^n(v) = 0$  נוכיח כי  $Tv = 0$ .

הוכחה  $T$  צמוד לעצמו ולכן נורמלי, כמו כן, מעל  $\mathbb{C}$  כל פולינום הוא מ"ל וסך הכל מקבלים ש  $T$  ניתן ללכסון אוניטרי. כעת קיים בסיס אורתונורמלי ל  $V$ ,  $B = \{v_1, \dots, v_m\}$  כך שהוא גם מלכסן את ההעתקה (ההעתקה לפי בסיס זה אלכסונית) כלומר  $Tv' = \lambda v'_i$  לכל  $v' \in B$  ו  $\lambda \in \sigma(T)$ . כעת  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ .

$$0 = T^n(v) = \alpha_1 T^n(v_1) + \dots + \alpha_m T^n(v_m) = \alpha_1 \lambda_1^n v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m^n v_m$$

(הערה  $\lambda_i$  הוא הערך העצמי המתאים ל  $v_i$ )

ומהיותו של  $B$  בסיס ובפרט בת"ל מתקיים, לכל  $1 \leq i \leq m$  כי  $\alpha_i \lambda_i^n = 0$

ובפרט חייב להתקיים  $\alpha_i \lambda_i = 0$  כלומר

$$T(v) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$$

## שאלה 3

### (סעיף א)

יהי  $V = \mathbb{R}^5$  מ"פ מעל  $\mathbb{R}$  עם הממ"פ הסטנדרטית.

$$T: V \rightarrow V \text{ זיה } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ תהי } Tv = Av$$

$T$  צמודה לעצמה משום שלוקחים את הבסיס הסטנדרטי  $E = \{e_1, \dots, e_5\}$  (הוא בפרט אורתונורמלי)

$$[T]_E = A \text{ ומתקיים } [T]_E^* = \overline{[T]_E}^t = A$$

ראינו בהרצאה, כי  $T$  צמודה לעצמה אם המטריצה המייצגת לפי בסיס אורתונורמלי צמודה לעצמה.

### (סעיף ב)

נמצא פולינום אופייני ומינימלי של  $A$  (זה שקול מבחינת הבסיס הסטנדרטי  $E$  שהגדרנו בסעיף קודם) נשים לב כי

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ולפי משפט מהרצאה, הפולינום האופייני של  $A$  הינו מכפלת הפ"א של שתי המטריצות.

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ -3 & x-2 \end{pmatrix} = (x+1)(x-4)(x-1)^2(x-5)$$

כמו כן, הפולינום המינימלי הוא  $lcm$  של הפולינומים המינימליים של הבלוקים.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ הוא } (x-4)(x-1)^2$$

ולכן  $m_{A_1}(x) \in \{(x-4), (x-1), (x-1)^2, (x-4)(x-1)^2\}$  ובעזרת אלמינציה (פולינומים ממעלה קטנה לגדולה), מגיעים לכך שהמינימלי הוא  $m_{A_1} = (x-4)(x-1)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ הוא } (x-5)(x+1)$$

ולכן  $m_{A_2} \in \{(x-5), (x+1), (x-5)(x+1)\}$  ובצורה דומה שוללים את הראשונים ומגיעים ל- $m_{A_2} = (x-5)(x+1)$

$$m_A = lcm\{m_{A_1}, m_{A_2}\} = (x+1)(x-4)(x-1)(x-5)$$

### (סעיף ג)

$A = [T]_E$  צמודה לעצמה ולכן נורמלית, בנוסף ראינו שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים ולכן לכסינה אוניטרית.

משום שמדובר במטריצת בלוקים ניקח  $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$

כאשר  $P_1$  מלכסנת את  $A_1$  ו  $P_2$  מלכסנת את  $A_2$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מפעילים גראם שמידט לקבלת בסיס אורתוגונלי ואז ננרמל לקבלת

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

## שאלה 4

הוכיחו/הפריכו:

### (סעיף א)

יהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור אוניטרי ויהי  $W \leq V$  תת מרחב אינווריאנטי, אז  $W^\perp$  אינווריאנטי. הוכחה יהי  $w \in W$  ו  $w' \in W^\perp$

$$\langle Tw', w \rangle = \langle w', T^*w \rangle = \langle w', T^{-1}w \rangle$$

אבל  $T^{-1}w \in W$  משום ש  $W$  אינווריאנטי וכן  $w' \in W^\perp$  ולכן  $\langle w', T^{-1}w \rangle = 0$  כלומר  $\langle Tw', w \rangle = 0$  ולכן  $Tw' \in W^\perp$

### (סעיף ב)

אם  $T: V \rightarrow V$  אופרטור המקיים  $T^2 = T$  אזי  $T$  ניתן לכסוף. הוכחה בעזרת העברת אגפים נקבל  $T^2 - T = 0$  כעת  $p(x) = x^2 - x = x(x - 1)$  הוא פולינום מאפס להעתקה, ולכן הפולינום המינימלי מחלק אותו. נקבל

$$m_A(x) \in \{x, x - 1, x(x - 1)\}$$

ובעבור כל אחד מהמקרים הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים ולפי משפט לכסוף.

### (סעיף ג)

יהי  $V$  מ"פ ויהיו  $W, U \leq V$  תתי מרחב אזי  $W^\perp \cap U^\perp = (W \cap U)^\perp$  הפרכה

נבחר  $W = V, U = \{0\}$  כעת מצד אחד, (לפי משפט הפירוק הניצב)

$$W^\perp \cap U^\perp = V^\perp \cap V = \{0\}$$

מצד שני,

$$(W \cap U)^\perp = (V \cap \{0\})^\perp = \{0\}^\perp = V$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שלכל  $v \in V$  מתקיים  $\langle 0, v \rangle = 0$ . וסיימנו.

## שאלה 5

נתון שעבור  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  מתקיים  $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$

### (סעיף א)

A סימטרית-לפעמים כן ולפעמים לא

למשל ניקח  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  שאינה סימטרית

ו  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  שכן סימטרית.

### (סעיף ב)

A ניתנת ללכסון- לכל A

המטריצה בגודל  $3 \times 3$  ויש לה 3 ערכים עצמיים ולכן סיימנו, לפי משפט מהרצאה.

### (סעיף ג)

$A^2 = A - A$  לא מתקיים לאף A

הוכחה

טענת עזר: נניח  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  אזי  $\sigma(A^2) = \{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\}$   
משום שלכל  $\lambda \in \sigma(A)$  מתקיים

$$Av = \lambda v$$

נכפול את שני הצדדים ב A ונקבל

$$A(Av) = \lambda(Av)$$

$$A^2v = \lambda^2v$$

וכעת במקרה שלנו  $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$  ולכן  $\sigma(A^2) = \{0, 1\}$ . יש להם ספקטרומים שונים ובפרט הם שונים  $A \neq A^2$ .