

פיתרון לתרגיל 8

תשובה 1:

א.האינטגרל צריך להיות 1:

(אפשר גם לפי חישובי שטחים של משולש + שני מלבנים):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^{1/2} 2x dx + \int_{1/2}^1 dx + \int_1^2 c dx = x^2 \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2} + c = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c = 1$$

$$c = \frac{1}{4}$$

ב.

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ a^2 & 0 \leq a < 1/2 \\ \frac{1}{4} + (a - 1/2) & 1/2 \leq a < 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + (a-1)\frac{1}{4} & 1 \leq a < 2 \\ 1 & 2 \leq a \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{4}\right) = F_X\left(\frac{3}{4}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{18} \quad \text{ג.}$$

ד. תוחלת של X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{1/2} 2x^2 dx + \int_{1/2}^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{4} x dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^{1/2} + \frac{x^2}{2} \Big|_{1/2}^1 + \frac{x^2}{8} \Big|_1^2 = \frac{25}{24}$$

תשובה 2:

א.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c \cdot \cos x dx = c \cdot \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = c \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= c [1 - (-1)] = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ב.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_x u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos u du = \frac{1}{2} \sin u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^x = \frac{1}{2} \left[\sin x - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

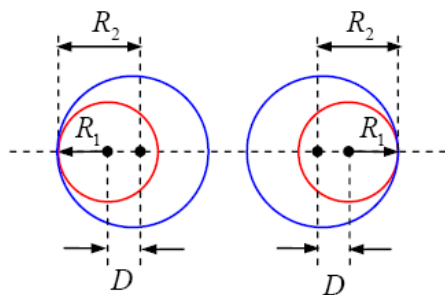
$$= \frac{1}{2} [\sin x + 1]$$

ולכן

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} [\sin x + 1] & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

תשובה 3:

הציור מראה כי את ההסתברות הדרושה אפשר לכתוב בצורה



$$P_0 = P(D \leq R_2 - R_1 / R_2 > R_1) P(R_2 > R_1)$$

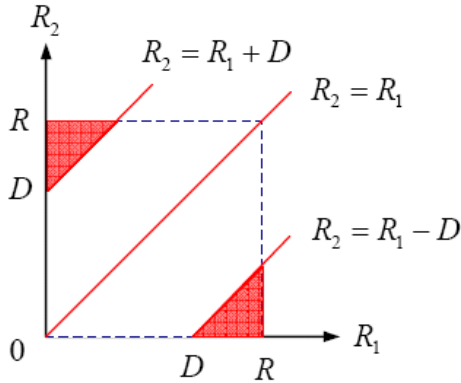
$$+ P(D \leq R_1 - R_2 / R_1 > R_2) P(R_1 > R_2)$$

מכאן ניתן לראות כי

$$P_0 = P(D \leq |R_2 - R_1|)$$

כיוון ש— $R_1 \sim U(0, R)$ ו— $R_2 \sim U(0, R)$, מותר להשתמש בגישה הקלאסית להסתברות.

• עבור $0 \leq D \leq R$ מתקיים:



$$P_0 = \frac{|\{D \leq |R_2 - R_1|\}|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (R - D)^2}{R^2} = \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2.$$

• עבור $D > R$, ההסתברות $P_0 = 0$ כן

שהתשובה הסופית היא

$$P_0 = \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2 \Theta(R - D)$$

באשר

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

תשובה 4:

$$X \in [0, 20]$$

נחלק לשני מאורעות:

או שמספיקים לרכבת של 07:15, זאת אומרת ש X בין 0 לבין 5, או שמגיעים לרכבת של

07:30, זאת אומרת ש X בין 5 לבין 20.

$$P(X \leq 5) = F_X(5)$$

עבור ערכי Y שבין 0 ל— 5, ישנן שתי אפשרויות — או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת הראשונה (של רבע) או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת השניה (של וחצי)

$$P(Y \leq y) = P(X \in [5-y, 5]) + P(X \in [20-y, 20]) = F_X(5) - F_X(5-y) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

עבור ערכי Y שגדולים מ— 5, הם יכולים להתקבל רק אם נגיע לרכבת השניה (של וחצי), הסיכוי שנמתין לפחות $y > 5$ דקות הוא הסיכוי להספיק לרכבת הראשונה (שכן אז נמתין פחות מ— y דקות), ועוד הסיכוי להמתין לפחות y דקות לרכבת השניה:

$$P(Y \leq y) = P(X \in [0, 5] + P(X \in [20-y, 20])) = F_X(5) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

ונגזור על-מנת לקבל צפיפות:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(5-y) + f_X(20-y) & 0 \leq y \leq 5 \\ f_X(20-y) & 5 \leq y \leq 15 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

תשובה 5:

א. הקשר בין המקדמים a ו- b לבין השורשים x_1 ו- x_2 נתון על ידי זוג הנוסחאות

$$x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{ו-} \quad x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

אשר מביאות

$$\begin{cases} a = -(x_1 + x_2), \\ b = x_1 x_2. \end{cases}$$

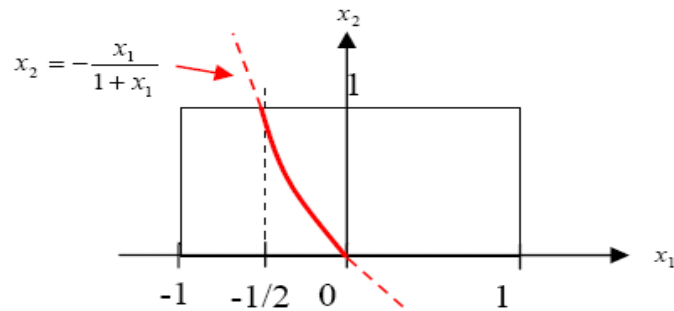
ההסתברות הדרושה, $P(a > b)$, היא

$$P(a > b) = P(-(x_1 + x_2) > x_1 x_2) = P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right)$$

בשיוון האחרון, השתמשנו בעובדה ש- $1+x_1$ אינו שלילי. על פי גישה קלאסית להסתברות,

$$P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right) = \frac{\left| \left\{ x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right\} \right|}{|\Omega|}$$

מהציר עולה, כי גודל מרחב המדגם הוא $|\Omega| = 2$. גודל המאורע $\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}$ הוא



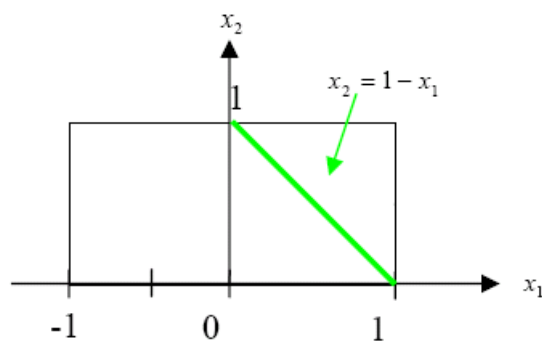
$$\begin{aligned} \left| \left\{ x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right\} \right| &= \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(-\frac{x_1}{1+x_1} \right) dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x_1+1-1}{1+x_1} dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(1 - \frac{1}{1+x_1} \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{1+x_1} dx_1 = \ln(1+x_1) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 = \ln 2. \end{aligned}$$

זה מביא

$$P(a < b) = \frac{\left| \left\{ x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right\} \right|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} \ln 2$$

ג. ההסתברות הזרושה היא הסתברות מותנית

$$\begin{aligned} P(b > 0 / a > -1) &= P(x_1 x_2 > 0 / -(x_1 + x_2) > -1) = P(x_1 > 0 / x_2 < 1 - x_1) \\ &= \frac{P(x_1 > 0 \cap x_2 < 1 - x_1)}{P(x_2 < 1 - x_1)} \end{aligned}$$



$$P(x_1 > 0 \cap x_2 < 1 - x_1) = \frac{|\{x_1 > 0\} \cap \{x_2 < 1 - x_1\}|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

וגם

$$P(x_2 < 1 - x_1) = \frac{|\{x_2 < 1 - x_1\}|}{|\Omega|} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

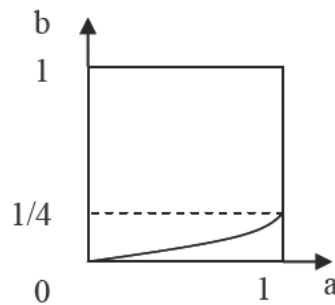
כך ש—

$$P(b > 0 / a > -1) = \frac{P(x_1 > 0 \cap x_2 < 1 - x_1)}{P(x_2 < 1 - x_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ג. שורשי המשוואה הם :

את התשובה יש לחלק לשנים. ראשית נחשב את ההסתברות ששורשי המשוואה ממשיים, דהיינו כאשר מתקיים $a^2 - 4b \geq 0$ דהיינו ההסתברות הדרושה היא $P(b < \frac{a^2}{4})$ שמתאימה בדיוק לשטח

שמתחת לעקום $b = \frac{a^2}{4}$



$$P(b < a^2 / 4) = \int_0^1 \frac{a^2}{4} da = \frac{1}{12}$$

בשלב השני נמצא את הסתברות ש- $\frac{1}{2} < \sqrt{a^2 - 4b} = |X_1 - X_2|$ כאשר נתון ש $a^2 - 4b \geq 0$

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{a^2 - 4b} < \frac{1}{2} / a^2 > 4b\right) &= P\left(a^2 - 4b < \frac{1}{4} / a^2 > 4b\right) \\ &= \frac{P\left(\left\{a^2 - 4b < \frac{1}{4}\right\} \cap \left\{a^2 > 4b\right\}\right)}{P(a^2 > 4b)} = \frac{P\left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{16} < b < \frac{a^2}{4}\right)}{P\left(b < \frac{a^2}{4}\right)} \end{aligned}$$

נשים לב ש $P(A < b < B) = P(b < B) - P(b < A)$ לכן

$$\frac{\int_0^1 \frac{a^2}{4} da - \int_{1/2}^1 \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{16}\right) da}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2}$$

תשובה 6:

ראשית פונקציית ההצטברות והצפיפות הן:

$$F_X(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

.א

$$Y = \sqrt{|X|}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{|X|} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y) = \frac{y^2 + 1}{2}$$

$$f_Y(y) = \frac{2y}{2} = y$$

.ב

$$Y = -\ln(|X|)$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln(|X|) \leq y) = P(\ln(|X|) \geq y) = P(|X| \geq e^y)$$

$$= P(X \geq e^y) + P(X \leq -e^y) = 1 - F_X(e^y) + F_X(-e^y) = 1 - \left(\frac{e^y + 1}{2}\right) + \left(\frac{-e^y + 1}{2}\right) = 1 - e^y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \leq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

תשובה 7:

$$P(X < 193.3) = P\left(\frac{X - 200}{\sigma} < \frac{193.3 - 200}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{-6.7}{\sigma}\right) = 0.25 \quad .א$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{6.7}{\sigma}\right) = 0.75 \Rightarrow \frac{6.7}{\sigma} = 0.675 \Rightarrow \sigma = 9.926$$

ב. נמצא את ההסתברות שמשקל חבילה יהיה נמוך מ-190g.

$$\begin{aligned} P(X < 190) &= P\left(Z < \frac{190 - 200}{9.926}\right) = P(Z < -1.01) = \\ &= [1 - \Phi(1.01)] = 1 - 0.8438 = 0.1562 \approx 0.16 \end{aligned}$$

נסמן ב-Y את מס' החבילות שמשקלן נמוך מ-190g :

$$Y \sim Bin(100, 0.16)$$

↓

$$V(Y) = npq = 100 \cdot 0.16 \cdot 0.84 \approx 13.44$$